B) Circuits électriques en régime sinusoïdal

1. Définitions, généralités
2. Dipôles en regime permanent sinusoïdal
3. Analyse de circuits en régime sinusoïdal

1. Définitions, généralités

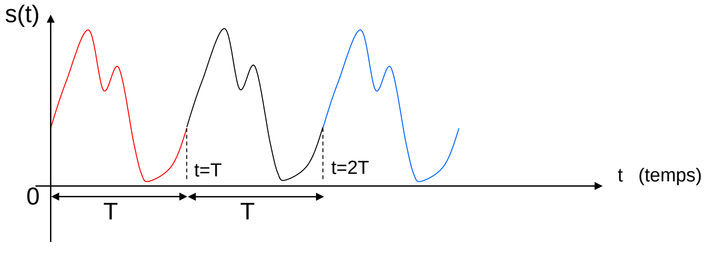
1.1 Grandeurs périodiques s(t)

Une grandeur physique est dite périodique si elle prend les mêmes valeurs à intervalles de temps régulier.

$s(t+T) = s(t)$ ou T est l'intervalle de temps appelé période (unité : seconde).

On définit la fréquence $f = 1/T$ qui indique le nombre de cycles par unité de temps. La fréquence a pour unité s^{-1} ou Hz (Hertz).

<u>Exemple</u>: f=50Hz correspond à 50 cycles par seconde pour une grandeur de période T=0,02 s



La grandeur physique s(t) est dit monodirectionelle si s(t) >0 (ou s(t)<0) $\forall$ t

La grandeur physique s(t) est dite bidirectionelle si s(t) change de signe pour t $\in$[0,T]

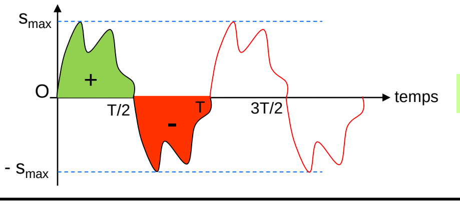
La valeur moyenne notée <s> d'une grandeur périodique de période T est définie par :

$$< s > = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\ dt$$

La valeur efficace notée s_{eff} d'une grandeur périodique de période T est définie par :

$$s_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\ dt$$

Cas particulier d'une grandeur alternative (bidirectionnelle et symétrique) : s(t+T/2) = -s(t)



<s>=0

1.2 Grandeurs sinusoïdales

Pourquoi privilégier les grandeurs sinusoïdales ?

fonctions périodiques et fonctions sinusoïdales

On démontre que toute fonction f(t), périodique de période T et satisfaisant à certaines conditions de continuité et de dérivabilité, peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales dite « série de FOURIER [1] » :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

$$\text{avec : } a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).dt \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\sin\frac{2\pi nt}{T}dt$$

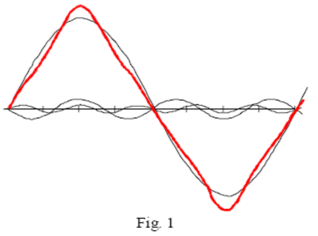


Fig. 1

A titre d'exemple, on a représenté les trois premiers termes du développement en série de Fourier d'une fonction triangle :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)\pi.t$$

La convergence est assez rapide. Pour la fonction créneau, représentée par :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)}\sin(2n+1)\pi.t$$

la convergence est par contre très lente.

La réponse d'un système *linéaire* à une fonction périodique est la somme des réponses aux fonctions sinusoïdales constituant le développement en série de Fourier de cette fonction. En conséquence, on peut privilégier l'étude de la réponse des circuits à une excitation sinusoïdale. La réponse à une fonction périodique sera obtenue en faisant la somme des réponses du circuit aux différents termes (nommés harmoniques) de sa décomposition en série de Fourier.

Un signal de période T, a pour fréquence fondamentale f=1/T est pour 1ere, 2ième, 3ième harmonique respectivement les fréquences 2f, 3f, 4f, …etc…

1.2.1 Fonction sinusoïdale

Soit la grandeur sinusoïdale $s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi)$

-Sa valeur instantanée est s(t)

-Sa valeur maximum ou valeur crête est S_m.

-Sa pulsation est ω. *La période est* $T=2\pi/\omega$. *La fréquence est* $f=1/T=\omega/2\pi$.

-Sa phase (à l'origine) est ϕ.

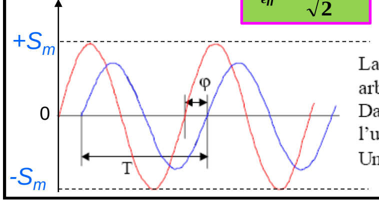
-La valeur moyenne pour une grandeur sinusoïdale <s>=0.

-La valeur efficace :

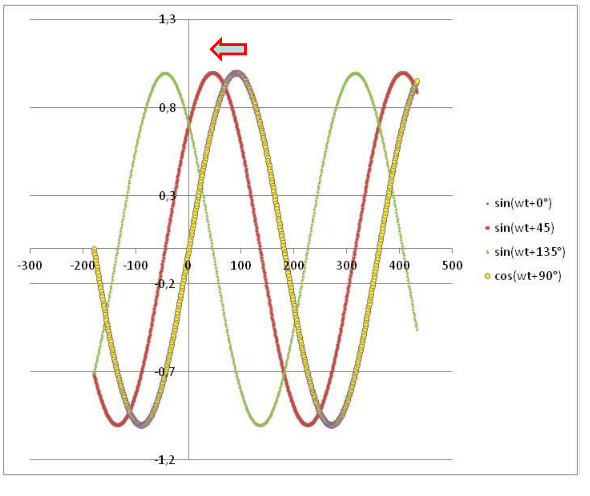
$$S_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T S_m{}^2 \cos(\omega t+\phi)^2 dt = \frac{S_m^2}{T}\int_0^T \frac{1+\cos 2\cdot(\omega t+\phi)}{2} dt$$

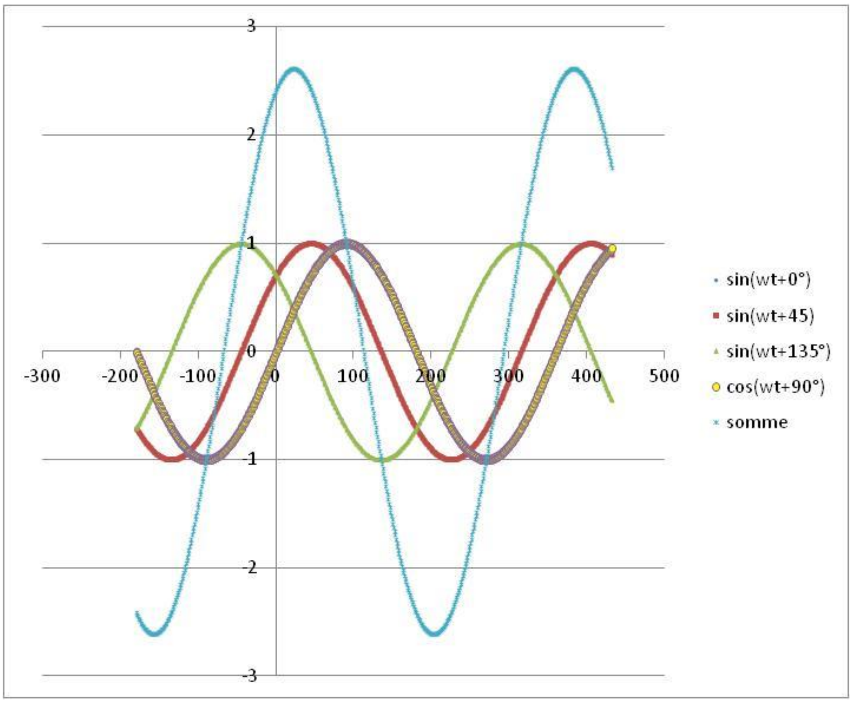
$$S_{eff}^2 = \frac{S_m^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2} dt + \frac{S_m^2}{T}\int_0^T \frac{\cos 2\cdot(\omega t+\phi)}{2} dt = \frac{S_m^2}{2}$$

$$\boxed{S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}} \quad \Rightarrow \quad s(t) = S_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t+\phi)$$



La phase est définie par rapport à une référence arbitraire.
Dans le cas de plusieurs signaux de même fréquence, l'un d'eux est utilisé comme origine pour les phases.
Une période entière correspond à un déphasage de 2π.

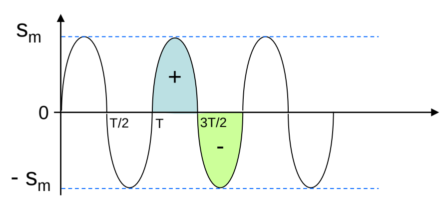




Exemple: s(t) = $S_m \cos(\omega\, t + \Phi)$

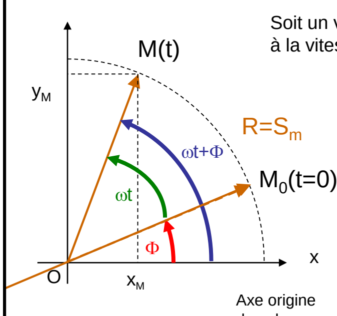
<s> = 0

$$s_{eff} = s = \frac{S_m}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad S_m = s_{eff}\sqrt{2} = s\sqrt{2}$$



1.2.2 Représentations pratiques de grandeurs sinusoïdales

Vecteur de Fresnel tournant



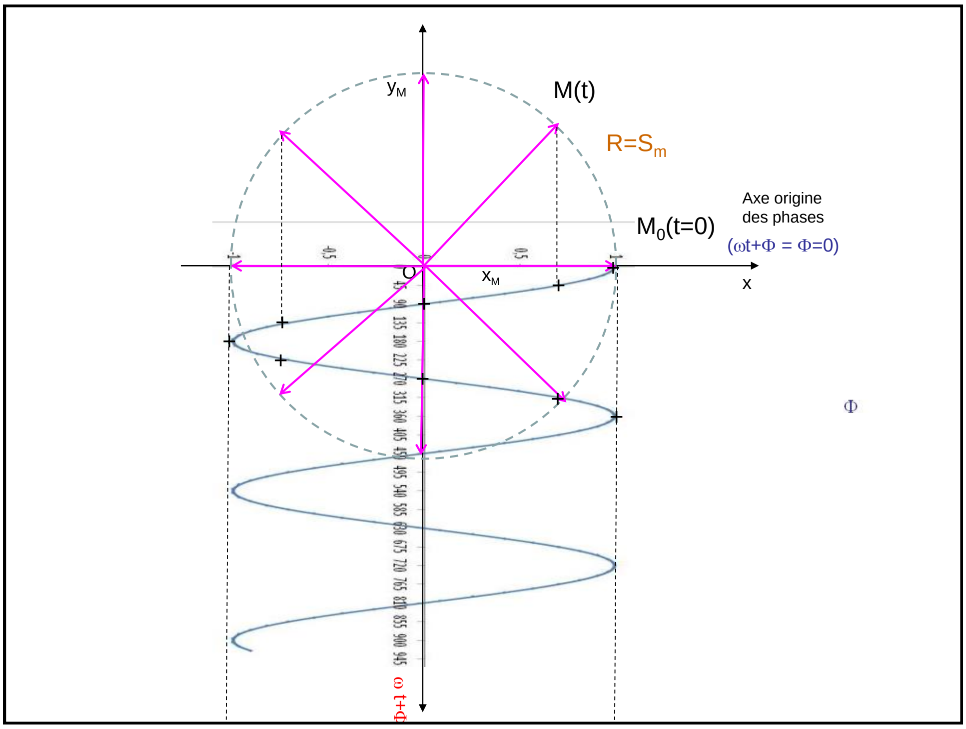
Soit un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de module constant égal à Sm qui tourne autour de l'origine O à la vitesse angulaire constante ω (rad.s^{-1})

à $t = 0$: le vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0$ qui fait un angle Φ avec l'axe Ox.

à l'instant t : $x_M = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| \cos(\omega t + \Phi) = S_m \cos(\omega t + \Phi)$

$\Rightarrow s(t) = x_M$ et $s(t) = S_m \cos(\omega t + \Phi)$

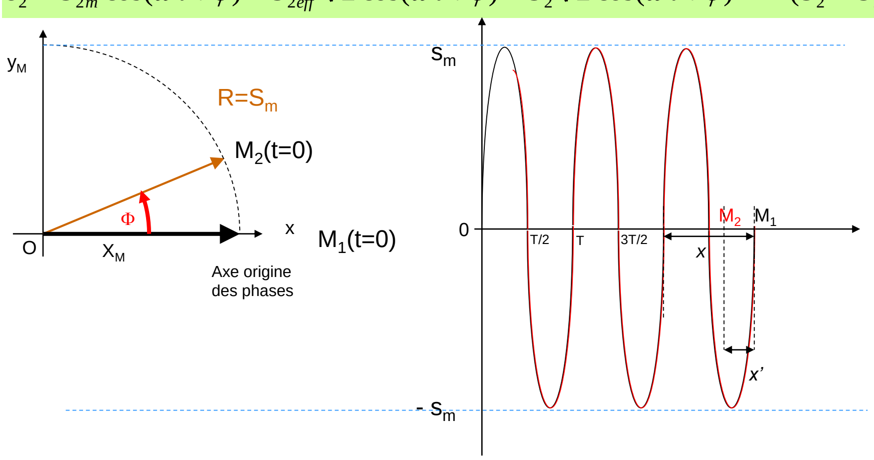
remarque : $s(t) = S_m \sin(\omega t + \Phi)$ est représenté par y_M



1.2.3 Déphasages de 2 grandeurs sinusoïdales de même périodes

$$s_1 = S_{1m}\cos\omega t = S_{1eff}\sqrt{2}\cos\omega t = S_1\sqrt{2}\cos\omega t \qquad (S_1 = S_{1eff})$$

$$s_2 = S_{2m}\cos(\omega t+\varphi) = S_{2eff}\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi) = S_2\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi) \qquad (S_2 = S_{2eff})$$



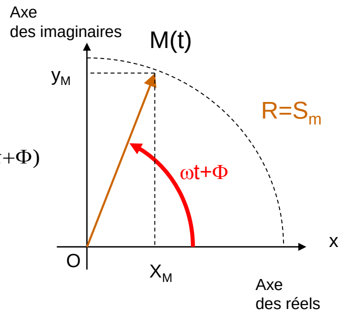
A l'aide d'un oscilloscope, le déphasage du point M_2 par rapport à M_1 s'écrit :

$$\Phi = 2\pi\frac{x'}{x}(rad) \text{ ou bien } \Phi = 360°\frac{x'}{x}$$

1.2.4 Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

Le vecteur de Fresnel OM précédent représenté dans l'espace complexe, est **l'image** du nombre complexe :

$$\underline{s}(t) = S_m\left(\cos(\omega t + \Phi) + j\sin(\omega t + \Phi)\right) = S_m e^{j(\omega t + \Phi)}$$



s(t) = partie réelle de $\underline{s}$(t)
S_m = module de $\underline{s}$(t)=|| $\underline{s}$(t)||
Phase $\omega t+\Phi$ = argument de $\underline{s}$(t)

$$\underline{s}(t) = S_m\left(\cos(\omega t + \Phi) + j\sin(\omega t + \Phi)\right) = S_m e^{j(\omega t + \Phi)} = S_m e^{j\Phi} e^{j\omega t} = \sqrt{2}\,(S_{eff}\, e^{j\Phi})\, e^{j\omega t}$$

Re($\underline{s}$(t)) Im($\underline{s}$(t))

$\underline{S_m} = S_m e^{j\Phi}$ est l'amplitude complexe; $\underline{S} = S_{eff}\, e^{j\Phi}$ est l'amplitude efficace complexe

En pratique on utilisera plutôt les amplitudes efficaces complexes associées

$$\underline{S} = S_{eff}\, e^{j\Phi} = S\, e^{j\Phi} = S \angle \Phi \quad \text{ou S est le module notation "phaseur"}$$

L'analogie entre le plan de Fresnel et le plan complexe conduit naturellement à représenter les vecteurs tournants associés aux grandeurs électriques sinusoïdales par des grandeurs imaginaires.

NOTATIONS :
Une grandeur complexe S sera notée $\underline{S}$ et son complexe conjugué $\overline{\underline{S}}$.
Les intensités étant souvent nommées avec la lettre **i**, pour éviter toute confusion le symbole des imaginaires est noté en électricité avec un **j** : $j^2 = -1$; $j = e^{j\pi/2}$
La partie réelle de $\underline{S}$ est notée $\Re(\underline{S})$, la partie imaginaire est notée : $\Im(\underline{S})$

Au vecteur $\overrightarrow{OG}$ du plan xOy, on associe le nombre complexe $\underline{S}$

$$\underline{S} = \Re(\underline{S}) + j.\Im(\underline{S})$$

Ainsi à l'intensité i(t) = I.cos(ωt), on fait correspondre $\underline{i}$ (t) = I.exp(jωt)

A la tension v(t) = V cos(ωt + φ), on fait correspondre $\underline{v}$ (t) = V.exp(jωt + φ)

Dans la suite, nous prendrons l'intensité comme origine des phases.

La grandeur physique est la partie réelle de la grandeur complexe associée.

En effet : i(t) = I.cos(ωt) = $\Re(\underline{i})$ = $\Re$(I.exp(jωt))
De même : v(t) = V.cos(ωt + φ) = $\Re(\underline{v})$ = $\Re$(V.exp{j(ωt + φ)})

Représentation de la somme de grandeurs sinusoïdales de même période.

Ex: $s(t) = S_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_1) + S_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_2) + S_3\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_3)$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 + \overrightarrow{OM}_3$

Conventions d'écriture adoptées pour la suite

écriture temporelle (ou valeur instantée) : $s(t) = S_m\cos(\omega t + \Phi) = S\sqrt{2}\cos(\omega t + \Phi)$

valeur maximale : S_m

valeur efficace : S

vecteur de Fresnel associé : $\overrightarrow{OM} = \vec{S}$

amplitude efficace complexe associée : $\underline{S} = Se^{j\Phi}$

notation phaseur : $S\angle\Phi$

amplitude efficace complexe conjugée : $\overline{\underline{S}} = Se^{-j\Phi}$

1.3 Circuits en régime permanent (ou forcé) sinusoïdal

1.3.1 condition de validité d'études

-Dans les alternateurs industriels ou les turbines les phénomènes d'induction électromagnétiques conduisent à la création de ddp sinusoïdales du type :

$$e(t) = E_m\cos(\omega t + \varphi)$$

- En fait nous avons une "onde électromagnétique" qui se propage dans le circuit ox à la vitesse de la lumière c, à laquelle on peut associer la grandeur A(x,t):

$$A(t,x) = A_m\cos(\frac{2\pi}{T}t - 2\pi\frac{x}{\lambda}) \qquad avec \qquad \lambda = \frac{c}{f}$$

Si $x << \lambda$ le terme $\frac{x}{\lambda}$ peut être négligé.On a alors un régime quasi-stationnaire fonction seulement de t.

Exemple: avec la tension de 50 Hz délivrée par EDF, la longueur d'onde associée est égale à :

$$\text{pour } 50\,\text{Hz} \quad : \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\ 10^8}{50} = 6\ 10^6\,m = 6000\,km$$

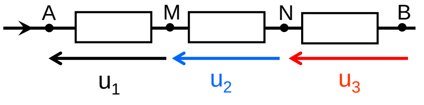
$$\text{pour } 1\,\text{GHz} \quad : \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\ 10^8}{1\ 10^9} = 3\ 10^{-1}\,m = 30\,cm$$

Avec un régime quasi-stationnaire toutes les lois vues dans le cas des circuits en courant continu sont applicables en valeurs instantanées:

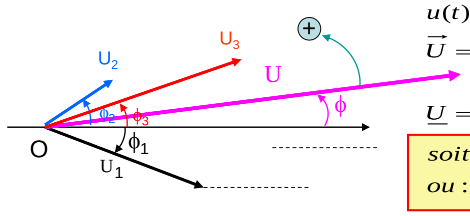
- Additivité des d.d.p
- Lois aux noeuds
- Théorème de superposition
- Théorème de Thévenin et Norton …

Ces relations instantanées se traduisent par des relations correspondantes sur les vecteurs de Fresnel associés ou sur les amplitudes complexes associées.

Example 1: Additivité des d.d.p



$$u_1(t) = U_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_1)$$
$$u_2(t) = U_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_2)$$
$$u_3(t) = U_3\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_3)$$
$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$$
$$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3 \qquad (Fresnel)$$

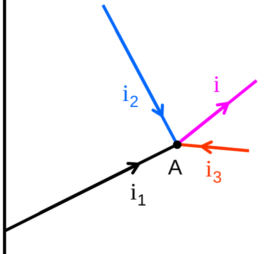


$$\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2} + \underline{U_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} soit: & U\,e^{j\phi} = U_1\,e^{j\phi_1} + U_2\,e^{j\phi_2} + U_3\,e^{j\phi_3} \\ ou: & U\angle\phi = U_1\angle\phi_1 + U_2\angle\phi_2 + U_3\angle\phi_3 \end{array}}$$

Cas : $\phi_1<0$, $\phi2>0$ et $\phi3>0$

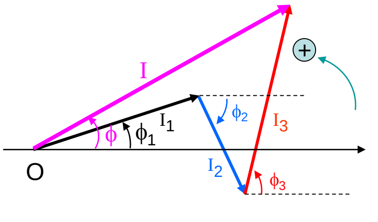
Example 2: Loi au noeud A



$$i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_1)$$
$$i_2(t) = I_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_2)$$
$$i_3(t) = I_3\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_3)$$
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$$
$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 \qquad (Fresnel)$$

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3}$$

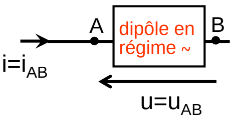
$$\boxed{\begin{array}{ll} soit: & I\,e^{j\phi} = I_1\,e^{j\phi_1} + I_2\,e^{j\phi_2} + I_3\,e^{j\phi_3} \\ ou: & I\angle\phi = I_1\angle\phi_1 + I_2\angle\phi_2 + I_3\angle\phi_3 \end{array}}$$



Cas : $\phi_1>0$, $\phi2<0$ et $\phi3>0$

2. Dipôles en regime permanent sinusoïdal

2.1 Loi d'Ohm – impédance - admittance



Le dipôle est soumis à la ddp : $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \underline{U} = Ue^{j0} = U$

il est alors parcouru par un courant i en retard de ϕ (algébrique) sur u :

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \phi) \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = I\,e^{-j\phi}$$

Par analogie avec la loi d'Ohm, on définit l'impédance complexe $\underline{Z}$, d'un dipôle comme étant le quotient de $\underline{U}$ par $\underline{I}$.

L' impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle : $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{U}{Ie^{-j\phi}} = \dfrac{U}{I}e^{j\phi} = Z\ e^{j\phi}$

$$\text{module: } \quad |\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} = \frac{U}{I} = Z \quad (\Omega) \qquad \text{et} \qquad \arg \underline{Z} = \arg \underline{U} - \arg \underline{I} = +\phi$$

L' admittance complexe $\underline{Y}$ du dipôle : $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{\underline{I}}{\underline{U}} = \dfrac{Ie^{-j\phi}}{U} = \dfrac{I}{U}e^{-j\phi} = Y\ e^{-j\phi}$

$$\text{module: } \quad |\underline{Y}| = \left|\frac{\underline{I}}{\underline{U}}\right| = \frac{|\underline{I}|}{|\underline{U}|} = \frac{I}{U} = Y \quad (S) \qquad \text{et} \qquad \arg \underline{Y} = \arg \underline{I} - \arg \underline{U} = -\phi$$

$$\underbrace{\underline{Z}}_{\text{Impédance complexe}} = Z\ e^{j\phi} = Z\cos\phi + j\ Z\sin\phi \quad = \quad \underbrace{R}_{\text{résistance}} + j\ \underbrace{X}_{\text{réactance}}$$

$$\text{module: } \quad |\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (\Omega) \qquad \text{et} \qquad \arg \underline{Z} = arctg\left(\frac{X}{R}\right)$$

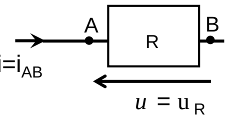
$$\underbrace{\underline{Y}}_{\text{admittance complexe}} = Y\ e^{-j\phi} = Y\cos\phi - j\ Z\sin\phi \quad = \quad \underbrace{G}_{\text{conductance}} + j\ \underbrace{B}_{\text{susceptance}}$$

$$\text{module: } \quad |\underline{Y}| = Y = \sqrt{G^2 + B^2} \quad (S) \qquad \text{et} \qquad \arg \underline{Y} = arctg\left(\frac{B}{G}\right)$$

2.2 Impédance élémentaire

2.2.1 Résistance linéaire R

La résistance R est parcourue par un courant alternatif d'expression :

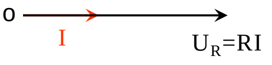


$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad u_R(t) = R\ i(t)$

$\Rightarrow u(t) = R\,I\sqrt{2}\cos(\omega t) = U_R\sqrt{2}\cos(\omega t) \quad$ avec $\quad U_R = R\,I$

$\Rightarrow \quad \underline{u(t) \ \ et \ \ i(t) \ \ sont \ \ en \ \ phase}$

- Diagramme de Fresnel

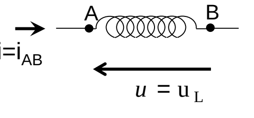


- impédance complexe

$$\underline{Z}_R = R = R\angle 0° \quad \text{module}: |\underline{Z}_R| = R \quad \text{et} \quad \arg = \phi = 0$$

2.2.2 Bobine idéale (r=0) L

La bobine (self) L est parcourue par un courant alternatif d'expression :

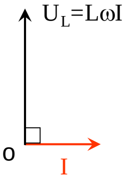


$\boldsymbol{i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t) \quad par\ definition \quad u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}}$

$\boldsymbol{\Rightarrow u(t) = -L\omega\, I\sqrt{2}\sin(\omega t) = U_L\sqrt{2}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{avec} \quad U_L = L\omega\, I}$

$\boldsymbol{\Rightarrow \quad u(t)\ \underline{est\ \ \text{en quadrature avance}}\ \ \text{sur}\ \ i(t)}$

- Diagramme de Fresnel

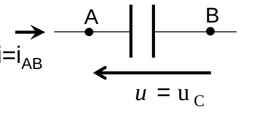


- impédance complexe

$$\underline{Z}_L = L\omega\, e^{j\frac{\pi}{2}} = jL\omega = L\omega\angle +\frac{\pi}{2} \quad \text{module}: |\underline{Z}_L| = L\omega \quad \text{et} \quad \arg = \phi = +\frac{\pi}{2}$$

2.2.3 condensateur idéal C

Le condensateur C est parcourue par un courant alternatif d'expression :



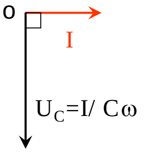
$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t) \qquad \textit{par definition} \qquad i(t) = C\frac{du_c}{dt}$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{1}{C}\int I\sqrt{2}\cos(\omega t)dt = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega}\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \qquad \text{avec} \qquad U_C = \frac{I}{C\omega}$$

$$\Rightarrow \quad u(t)\ \text{est en quadrature retard sur}\ i(t)$$

- Diagramme de Fresnel



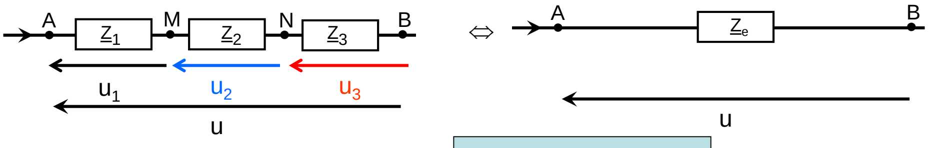
- impédance complexe

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{j}{C\omega} = \frac{1}{C\omega}\angle -\frac{\pi}{2} \qquad \text{module}: \left|\underline{Z}_C\right| = \frac{1}{C\omega} \quad \text{et} \quad \arg = \phi = -\frac{\pi}{2}$$

2.3 Association d'impédances complexes

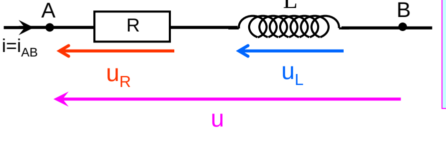
2.3.1 Association d'impédances en série

2.3.1.1 impédance complexe équivalente



$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

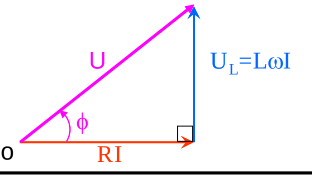
Exemple 1: circuit R,L (bobine réelle)



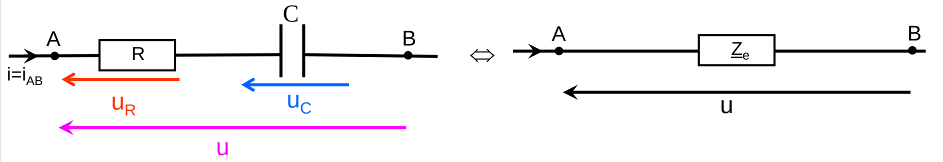
$$u(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Z}_e = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + jL\omega$$

$$\text{module}\left|\underline{Z}_e\right| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad \text{et} \quad \arg \underline{Z}_e = \phi = arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$



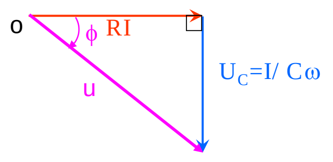
Exemple2: circuit R,C (bobine réelle)



$$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Z_e} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R - j\frac{1}{C\omega}$$

$$\text{module}\left|\underline{Z_e}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{et} \quad \arg \underline{Z_e} = \phi = arctg\left(-\frac{1}{RC\omega}\right)$$

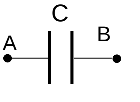


Exercices d'applications

$$f = 150\,Hz \qquad C = 530{,}5\ \mu F$$

$$\text{module}: \left|\underline{Z}_C\right| = Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{530{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 150} = 1{,}99999 \approx 2\,\Omega$$

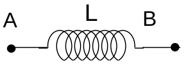
$$\underline{Z}_C = -\frac{j}{C\omega} = \ -2j$$



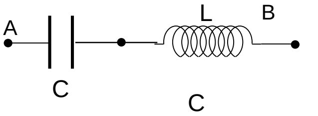
$$f = 150\,Hz \qquad L = 23{,}34\ mH$$

$$\text{module}: \left|\underline{Z}_L\right| = Z_L = L\omega = 23{,}34 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 150 = 21{,}997 \approx 22\,\Omega$$

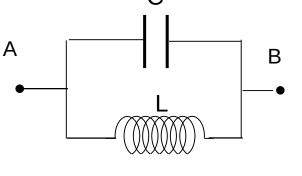
$$\underline{Z}_L = jL\omega = \ 22j$$



$$\underline{Z}_{AB} =$$

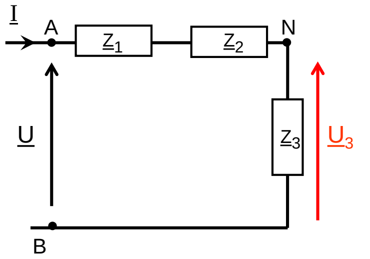


$$\underline{Z}_{AB} =$$



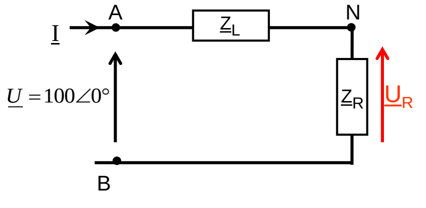
2.3.1.2 Diviseur de tension, utilisation des “phaseurs”

Cas de 3 impédances $\underline{Z}_1$,$\underline{Z}_2$,$\underline{Z}_3$ en série



$$\underline{U}_3 = \underline{Z}_3\,\underline{I} = \underline{U}\left(\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}\right)$$

Exemple Calculer $\underline{U}_R$ dans le cas du circuit (R,L)



$$\underline{U}_R = \underline{Z}_R\,\underline{I} = \underline{U}\left(\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R+\underline{Z}_L}\right) = \underline{U}\left(\frac{R}{R+jL\omega}\right)$$

$$\underline{U}_R = \underline{U}\left(\frac{R(R-jL\omega)}{R^2+L^2\omega^2}\right) = \underline{U}\left(\frac{R^2-jL\omega R}{R^2+L^2\omega^2}\right)$$

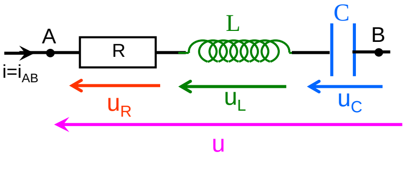
$$|\underline{U}_R| = |\underline{U}|\frac{R\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}{R^2+L^2\omega^2} = |\underline{U}|\frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \quad et \quad \arg = \arctan\left(-\frac{L\omega}{R}\right)$$

$$R = 30\Omega, \qquad L\omega = 40\Omega$$

$$|\underline{U}_R| = 100\frac{30}{\sqrt{2500}} = 60 \;\; et \quad \arg = \arctan\left(-\frac{40}{30}\right) \Rightarrow \phi = -59°$$

$$\underline{U}_R = 60V\angle -59°$$

2.3.1.3 Circuit résonant série (R,L,C)



$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Z}_e = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\text{module}\,|\underline{Z}_e| = \sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{et} \quad \arg\,\underline{Z}_e = \phi = arctg\left(\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{\mathrm{R}}\right)$$

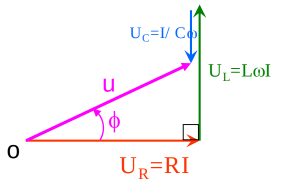
- Résonance

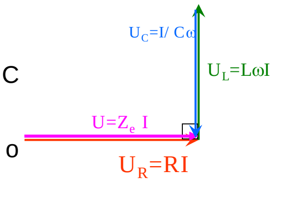
$$\boxed{LC\omega^2=1}$$

Z_e est minimum : Z_e=R

$\underline{U}=\underline{Z}_e\,\underline{I}$ $\quad \underline{Z}_e$ est minimum ➔ $\underline{I}$ est maximum

$\underline{U}$ et $\underline{I}$ sont en phase





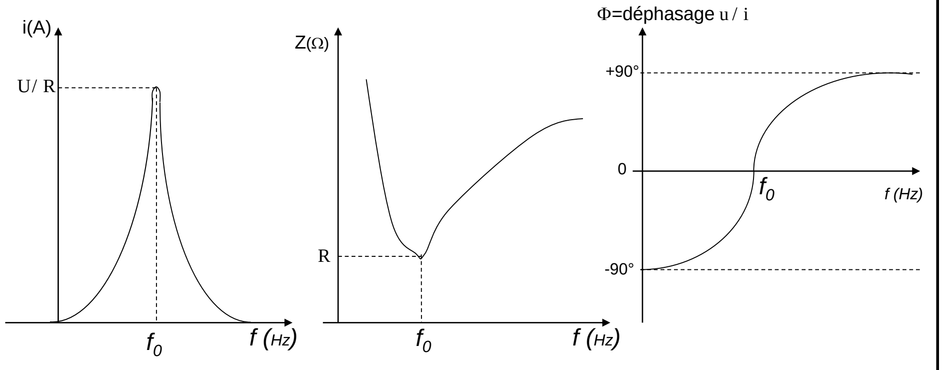
Il y a surtension au borne de L et C

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{L\omega}{R} = \frac{1}{RC\omega}$$

Q est le coefficient de surtention

• Etude de la résonance par variation de la fréquence f ($\omega=2\pi f$)

Résonance pour f_0 : $LC\omega^2 = 4\pi^2 LC f_0 = 1$



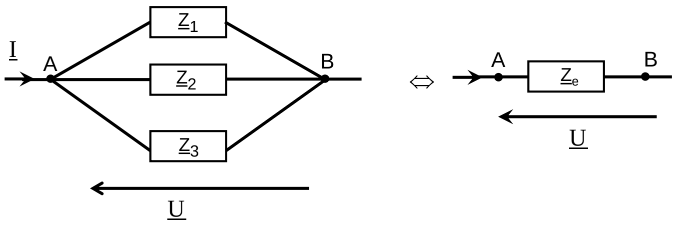
Exemple: R10Ω; L=1H; C=10µF. Calculer ω_0, f_0 et Q ?

$$LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 316{,}22 \;\; et \;\; f_0 = 50{,}33 Hz$$

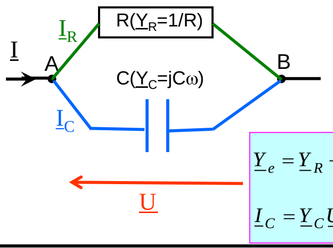
$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} = 31{,}62$$

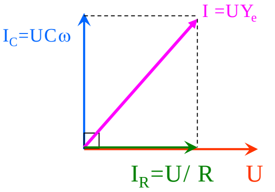
2.3.2 Association d'impédances en parallèle

2.3.2.1 Admittances complexes équivalentes



$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \underline{U}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}\right) \Rightarrow \underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$$



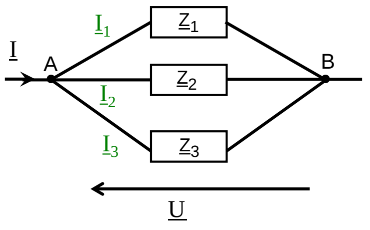


$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + jC\omega$$

$$\underline{I}_C = \underline{Y}_C \underline{U} = jUC\omega \;\; et \;\; \underline{I}_R = \underline{Y}_R \underline{U} = \frac{\underline{U}}{R}$$

2.3.2.2 diviseur de courant

Cas de 3 impédances $\underline{Z}_1$,$\underline{Z}_2$,$\underline{Z}_3$ en parallèle



$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3\,\underline{U} = \underline{I}\left(\frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}\right)$$

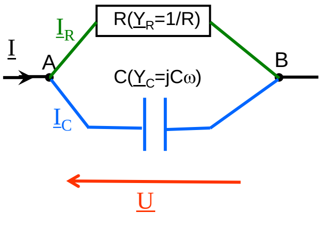
Exemple : exprimer $\underline{I}_C$ dans le cas du circuit (R//C)

$$\underline{I}_C = \underline{Y}_C\,\underline{U} = \underline{I}\left(\frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}_R+\underline{Y}_C}\right)$$

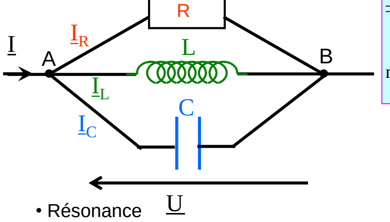
Prenons $i = I\sqrt{2}\cos\omega t \Rightarrow \underline{i} = I\sqrt{2}\;e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{I} = Ie^{j0}$

$$\underline{I}_C = \underline{I}\left(\frac{jC\omega}{\frac{1}{R}+jC\omega}\right) = \underline{I}\left(\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}\right) = \underline{I}\left(\frac{RC\omega(RC\omega+j)}{1+(RC\omega)^2}\right)$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}\left(\frac{RC\omega}{1+(RC\omega)^2}\right)(RC\omega+j)$$



2.3.2.3 Circuit résonant parallèle (R,L,C)



$u(t) = u_R(t) = u_L(t) = u_C(t)$

$\Rightarrow\;\; \underline{Y}_e = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$

module $|\underline{Y}_e| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$ et arg $\underline{Y}_e = \phi = \arctan R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$

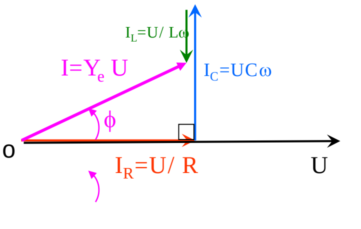
- Résonance

$\boxed{LC\omega^2=1}$

Y_e est minimum : Y_e=1/R

$\underline{I}=\underline{Y}_e\,\underline{U}$ $\underline{Y}_e$ est minimum ➔ $\underline{I}$ est minimum

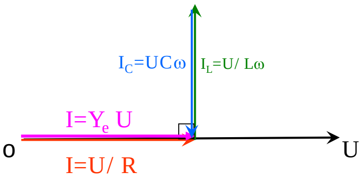
$\underline{U}$ et $\underline{I}$ sont en phase



Il y a surintensité aux bornes de L et C

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} \quad\Rightarrow\quad Q = \frac{R}{L\omega} = RC\omega$$

Q est le coefficient de surintensité



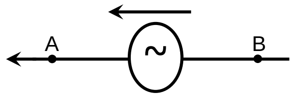
2.4 Générateurs sinusoïdaux

2.4.1 générateurs de tension

- Générateur de tension idéal (impédance interne nulle)

$E\angle\varphi$ $E\angle\varphi$

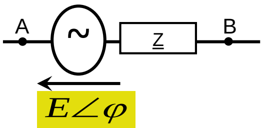
Exemple



Impose dans la branche une tension :

$40V\angle\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $e(t) = e_{AB}(t) = 40\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\ V$

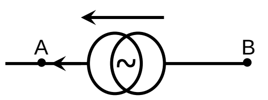
- Générateur de tension réel (impédance interne non nulle)



$E\angle\varphi$

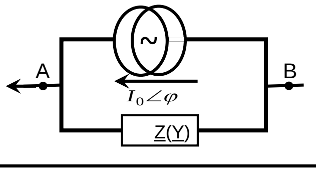
2.4.2 générateurs de COURANT

- Générateur de courant idéal (impédance interne nulle)



$I_0\angle\varphi$

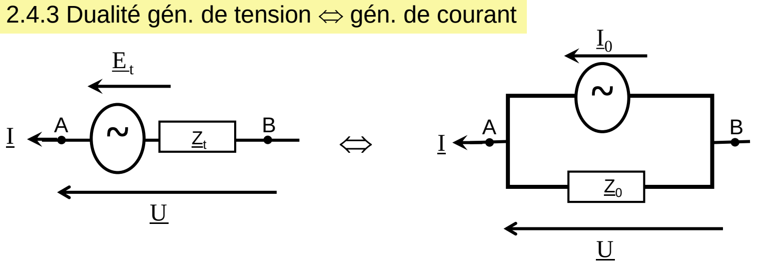
- Générateur de courant réel (impédance interne non nulle)



Impose dans la branche un courant :

$i(t) = i_{BA}(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)\ A$

2.4.3 Dualité gén. de tension ⇔ gén. de courant



$$g.t. \rightarrow g.c. \begin{cases} \underline{I}_0 = \dfrac{\underline{E}_t}{\underline{Z}_t} \\ \underline{Z}_0 = \underline{Z}_t \end{cases}$$

$$g.c. \rightarrow g.t. \begin{cases} \underline{E}_t = \underline{Z}_0 . \underline{I}_0 \\ \underline{Z}_t = \underline{Z}_0 \end{cases}$$

2.5 Association dipôle actif et dipôle passif

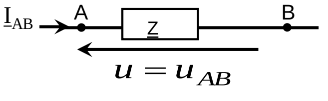
2.5.1 puissance instantanée

Prenons $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t)$ et $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \phi)$

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = u(t).i(t)$$

$$P(t) = 2.U.I.\cos(\omega t).\cos(\omega t - \phi) = 2.U.I.\cos(\omega t).[\cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t.\sin\phi]$$
$$P(t) = U.I.[2.\cos^2\omega t\cos\phi + 2.\cos\omega t.\sin\omega t.\sin\phi] = U.I.[(\cos 2\omega t + 1)\cos\phi + \sin 2\omega t.\sin\phi]$$
$$P(t) = U.I.[(\cos 2\omega t.\cos\phi + \sin 2\omega t.\sin\phi + \cos\phi] = U.I.[\cos(2\omega t - \phi) + \cos\phi]$$
$$P(t) = \underbrace{U.I.\cos\phi}_{\text{Puissance active}} + \underbrace{U.I.\cos(2\omega t - \phi)}_{\text{Puissance fluctuante}}$$

2.5.2 puissance moyenne



$$u = u_{AB}$$

$$\boldsymbol{P = \frac{1}{T}\int_0^T P(t).dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u(t).i(t)dt = U.I.\cos\phi}$$

Facteur de puisssance : $\cos\phi$

Puissance active : P (W)
Puissance apparente : U.I (V.A)

Si le facteur de puissance est > 0 le dipôle est passif
Si le facteur de puissance est < 0 le dipôle est actif

Exemple:

$$
\begin{aligned}
&\text{Prenons}\quad u(t) = 230\sqrt{2}\cos(\omega t) \ \text{ et }\ i(t) = 18\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{10}\right)\\
&U = 230V \quad I = 18A \qquad \cos\phi = 0{,}8 \qquad \Rightarrow P(t) = U.I.\cos\phi + U.I.\cos(2\omega t - \phi)\\
&P(t)\max : U.I.\cos\phi + U.I = 7{,}45\,kW\\
&P(t)\min : U.I.\cos\phi - U.I = -0{,}82\,kW\\
&\textit{Avec une puissance moyenne} = 3{,}3\,kW = U.I.\cos\phi
\end{aligned}
$$

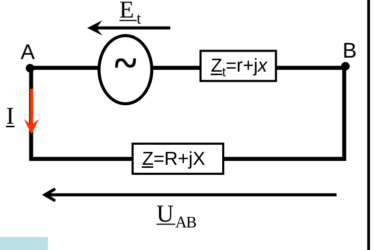
2.5.3 puissance complexe

$$
\begin{aligned}
&\textbf{Prenons}\quad u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \underline{\mathrm{U}} = \mathrm{U.e}^{\mathrm{j}\phi}\\
&\textbf{et}\quad i(t) = I\sqrt{2}\cos\omega t \Rightarrow \underline{\mathrm{I}} = \mathrm{I.e}^{\mathrm{j}0}\\
&\underline{P} = \underline{U}\cdot\underline{I}^* = U.I.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} = U.I.\cos\phi + j.U.I.\sin\phi = P + jQ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&S = U.I \ \textit{puissance apparente (Volt Ampère} : V.A)\\
&P = U.I.\cos\phi \ \textit{puissance active (Watt} : W)\\
&Q = U.I.\sin\phi \ \textit{puissance réactive (Volt Ampère Réactif} : V.A.R)
\end{aligned}
$$

2.5.4 adaptation d'impédance

Puissance mise en jeu dans le dipôle AB d' impédance Z



$$
\begin{aligned}
&\underline{P} = \underline{U}_{AB}.\underline{I}^*_{AB}\\
&\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}+\underline{Z}_t}\underline{E}_t \quad \textit{et} \quad \underline{I}_{AB} = \frac{\underline{E}_t}{\underline{Z}+\underline{Z}_t}\\
&P = \left[\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}+\underline{Z}_t}\underline{E}_t\right]\cdot\left[\frac{\underline{E}^*_t}{\underline{Z}^*+\underline{Z}^*_t}\right] = \frac{\underline{Z}}{(\underline{Z}+\underline{Z}_t)^2}E_t^{\,2}\\
&P_{active} = \mathrm{Re}(P)\\
&\textit{On montre que} : P_a = E_t^2\left[\frac{R}{(R+r)^2 + (X+x)^2}\right]\\
&P_a \max\ \textit{pour} : X \to x \ \textit{et}\ R \to r \ \text{c'est à dire } \underline{Z} \to \underline{Z}_t
\end{aligned}
$$

3. Analyse de circuits en régime sinusoïdal

3.1. Généralités

Toutes les méthodes d'analyse vues dans le cas des circuits en courant continu sont transposables avec les notations complexes.

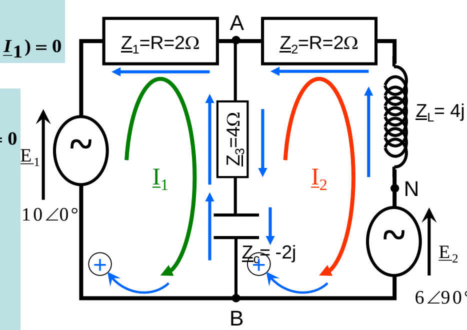
Le retour aux "significations physiques" se fait par :

modules => valeurs efficaces
arguments => déphasages relatifs

3.2. Méthode des mailles – méthode des noeuds

3.2.1 Méthode des mailles

Exemple de circuit



$$\begin{cases} m(1): & \underline{E}_1 - \underline{Z}_1\underline{I}_1 - \underline{Z}_3(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) - \underline{Z}_C(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) = 0 \\ m(2): & -\underline{Z}_2\underline{I}_2 - \underline{Z}_L\underline{I}_2 - \underline{E}_2 - \underline{Z}_C(\underline{I}_2 - \underline{I}_1) - \underline{Z}_3(\underline{I}_2 - \underline{I}_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(1): & 10 - 2\underline{I}_1 - 4(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) - (-2j)(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) = 0 \\ m(2): & -2\underline{I}_2 - 4j\underline{I}_2 - 6j - (-2j)(\underline{I}_2 - \underline{I}_1) - 4(\underline{I}_2 - \underline{I}_1) = 0 \end{cases}$$

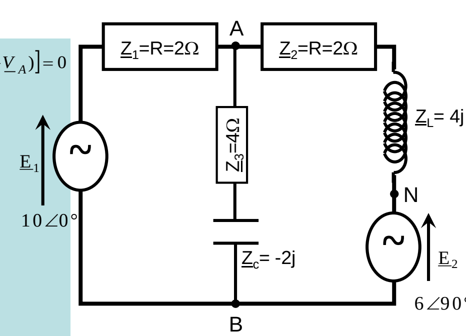
$$\begin{cases} m(1): & (6-2j)\underline{I}_1 - (4-2j)\underline{I}_2 = 10 \\ m(2): & -(4-2j)\underline{I}_1 + (6+2j)\underline{I}_2 = -6j \end{cases}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{16-11j}{13} = 1{,}494A\angle -34°{,}51$$

$$\underline{I}_2 = \frac{-7-126j}{65} = 1{,}941A\angle -93°{,}18$$

3.2.2 Méthode des noeuds

Exemple de circuit



Au noeud A:

$$\frac{1}{\underline{Z}_1}\left[\underline{E}_1 + (\underline{V}_B - \underline{V}_A)\right] + \frac{1}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_C}\left[\underline{V}_B - \underline{V}_A\right] + \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L}\left[\underline{E}_2 + (\underline{V}_B - \underline{V}_A)\right] = 0$$

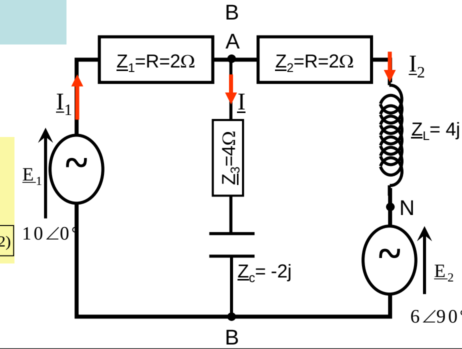
$$\frac{1}{2}\left[10 + \underline{V}_{BA}\right] + \frac{1}{4-2j}\left[\underline{V}_{BA}\right] + \frac{1}{2+4j}\left[6j + \underline{V}_{BA}\right] = 0$$

$$\underline{V}_{BA}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4-2j} + \frac{1}{2+4j}\right] = -5 - \frac{6j}{2+4j}$$

$$\underline{V}_{BA}\left[\frac{10}{20} + \frac{4+2j}{20} + \frac{2-4j}{20}\right] = -5 - \frac{6j.(2-4j)}{20}$$

$$\underline{V}_{AB} = 2\left[\frac{49+11j}{13}\right] = 7{,}726V\angle 12°{,}65$$

récapitulatif



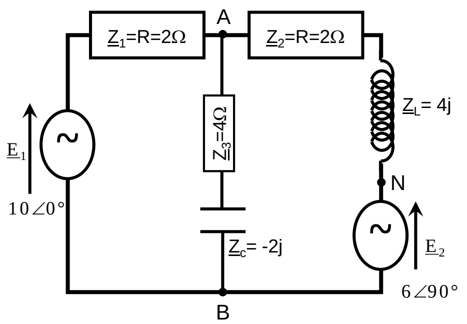
$$\underline{I}_1 = \frac{16-11j}{13} = 1{,}494A\angle -34°{,}51 \Rightarrow \boxed{i_1(t) = 1{,}49\sqrt{2}\cos(\omega t - 34°{,}51)}$$

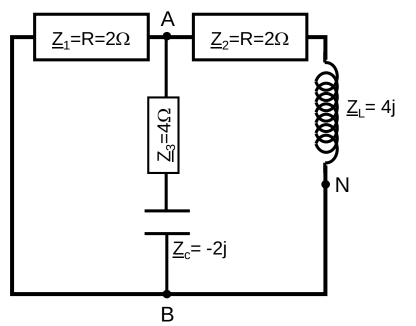
$$\underline{I}_2 = \frac{-7-126j}{65} = 1{,}941A\angle -93°{,}18 \Rightarrow \boxed{i_2(t) = 1{,}941\sqrt{2}\cos(\omega t - 93°{,}18)}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \frac{87+71j}{65} = 1{,}728A\angle +39°{,}22 \Rightarrow \boxed{i(t) = 1{,}728\sqrt{2}\cos(\omega t + 39°{,}22)}$$

3.3. Théorème de Thévenin et Norton

3.3.1 Théorème de Thévenin





Calcul de $\underline{E}_{TH}$

$$\underline{E}_{TH} = \underline{V}_{AB} = 2\left[\frac{49+11j}{13}\right] = 7{,}726V\angle 12°{,}65$$

$$\Rightarrow e_{TH}(t) = 7{,}726\sqrt{2}\cos(\omega t + 12°{,}65)$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{TH}} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4-2j} + \frac{1}{2+4j}\right]$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_{TH} = 2\left[\frac{8+j}{13}\right]$$

3.3.2 Théorème de Norton

impédance du générateur de Norton

$$\underline{Z}_N = \underline{Z}_{TH}$$

Calcul de $\underline{I}_N$ courant de "court circuit"

$$\underline{I}_N = \frac{10}{2} + \frac{6j}{2+4j} = \frac{(5+13j)}{1+2j}$$

$$\underline{I}_N = \left[\frac{31+3j}{5}\right] = 6{,}23A\angle 5°{,}53$$

$$\Rightarrow i_N(t) = 6{,}23\sqrt{2}\cos(\omega t + 5°{,}53)$$