Troisième partie
Fonction numériques de variable réelle

1 Notions liées à l'ordre "$\leq$"

1.1 Fonctions Lipschitzinnes

1.1.1 Fonction f "$<$Lipschitzienne de rapport k"$>$ sur un intervalle U de $\mathbb{R}$

Une fonction est Lipschitzienne si $\forall (x,x') \in U^2, |f(x) - f(x')| \leq k.|x - x'|$

1.1.2 Contraction sur U

Une contraction sur U est une fonction Lipschitzienne sur U, de rapport k entre 0 et 1

1.1.3 Quatres formules de trigonométrie utiles

$cos(p) + cos(q) = 2.cos(\frac{p+q}{2}).cos(\frac{p-q}{2})$

$sin(p) + sin(q) = 2.sin(\frac{p+q}{2}).cos(\frac{p-q}{2})$

$cos(p) - cos(q) = -2.sin(\frac{p+q}{2}).sin(\frac{p-q}{2})$

$sin(p) - sin(q) = 2.sin(\frac{p-q}{2}).cos(\frac{p+q}{2})$

1.2 Le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle U dans D_f

Fonction f croissante sur U : $x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$
Fonction f strictement croissante sur U : $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$
Fonction f décroissante sur U : $x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$
Fonction f strictement décroissante sur U : $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

1.3 Les bornes de l'ensemble image

Maximum local de f : $\forall x \in [a,b] \, \exists M, M \geq f(x)$
Minimum local de f : $\forall x \in [a,b] \, \exists M, M \leq f(x)$
Extrema locaux de f : Ce sont les maxima et minima locaux de f
Maximum absolu de f : C'est s'il existe, max f
Mimimum absolu de f : C'est s'il existe, min f

2 Limites

2.1 Limite d'une fonction f en un réel a ou en un infini

On rappelle l'unicité de la limite : $l = lim_a f = lim_{x \longrightarrow a} f(x)$

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Quelques remarques :
- Il n'est pas indispensable que f soit définie en a pour qu'elle y admette une limite
- Si f est définie en a et admet une limite en a, nécessairement $lim_a f = f(a)$
- Il se peut que f soit définie en a sans admettre de limite en a
- Si f admet en a une limite l, cette limite (en a) est unique
- Toute fonction f définie au moins sur un intervalle ouvert U contenant a et continu en a

2.2 Limite à gauche, limite à droite

Limite à gauche : C'est la limite quand x est assez proche de a par valeurs inférieures

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in (R)_+^*, \forall x \in D_f, 0 < a - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Limite à droite : C'est la limite quand x est assez proche de a par valeurs supérieures

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Remarque : Si $\lim_a f$ existe alors la limite a gauche et droite existent

2.3 Limite l de f en un infini

En $+\infty$ Définition classique

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

En $-\infty$ Définition classique

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

.

2.4 Limites et opérations sur les fonctions

8 propriétés à connaitres

$a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$

$\boxed{1}$ $[\lim_a f \overset{\text{existe}}{=} 0] \Leftrightarrow [\lim_a |f| \overset{\text{existe}}{=} 0]$

$\boxed{2}$ $[\lim_a f \overset{\text{existe}}{=} \ell] \Rightarrow [\lim_a |f| \overset{\text{existe}}{=} |\ell|]$

$\boxed{3}$ $[\lim_a f \overset{\text{existe}}{=} \ell]$ et $[\lim_a g \overset{\text{existe}}{=} \ell'] \Rightarrow [\lim_a f+g \overset{\text{existe}}{=} \ell+\ell']$

$\boxed{4}$ $[\lim_a f \overset{\text{existe}}{=} \ell] \Leftrightarrow [\lim_a \lambda.f \overset{\text{existe}}{=} \lambda.\ell]$ si $\lambda \neq 0$.

$\boxed{5}$ $[\lim_a f \overset{\text{existe}}{=} 0$ et g est bornée sur $U] \Rightarrow [\lim_a f\times g \overset{\text{existe}}{=} 0]$

$\boxed{6}$ $[\lim_a f \overset{\text{existe}}{=} \ell$ et $\lim_a g \overset{\text{existe}}{=} \ell'] \Rightarrow [\lim_a f\times g \overset{\text{existe}}{=} \ell\times\ell']$

$\boxed{7}$ $[\forall x\in U, g(x) \neq 0$ et $\lim_a g \overset{\text{existe}}{=} \ell'$ et $\ell' \neq 0] \Rightarrow [\lim_a \frac{1}{g} \overset{\text{existe}}{=} \frac{1}{\ell'}]$

$\boxed{8}$ $[\lim_a f \overset{\text{existe}}{=} \ell$ et $\forall x\in U, g(x) \neq 0$ et $\lim_a g \overset{\text{existe}}{=} \ell'$ et $\ell' \neq 0] \Rightarrow [\lim_a \frac{f}{g} \overset{\text{existe}}{=} \frac{\ell}{\ell'}]$

2.5 Comparaison de deux fonctions au voisinage d'un réel a ou d'un infini

Equivalence de fonctions : $\forall x \in U, f(x) = g(x).\beta(x) \wedge \lim_{x\to a} \beta(x) \overset{existe}{\rightarrow} 1$.
On note $f \approx g$, qui est une relation d'équivalence

Quelques équivalences à savoir :
- Pour un polynome, en $+\infty$ c'est équivalent au terme de plus haut degrès, en$-\infty$ c'est équivalent au terme de plus faible degrès.
- $sin(x), tan(x), ln(1+x), e^x - 1$ sont équivalents à x quand $x \to 0$
- Une fonction est équivalente à sa limite $(l \neq 0)$

Domination d'une fonction : $f(x) = g(x).\gamma(x)$ avec $\gamma(x)$ une fonction bornée, on note $f = O(g)$.
Si f est dominée au voisnage de a, par une fonction g qui a une limite 0 en a alors f admet également 0 pour limite en a.

Négligeabilité d'une fonction : $f(x) = g(x).\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x)$ une fonction qui a pour limite 0, on note $f = o(g)$.
Si f est négligeable au voisinage de a devant une fonction g bornée sur U alors f a pour limite 0 en a.

2.6 Propriétés des limites liées à l'ordre "$\leq$"

On se rapelle des différentes FI

2.6.1 Théorèmes de comparaison

- Si f $<$ g alors si $f \xrightarrow{a} +\infty, g \xrightarrow{a} +\infty$
- Théorème des gendarmes

2.6.2 Limites pour des fonctions monotones

On prend la fonction f sur]a,b[
- Si f est croissante majorée alors f admet une limite à gauche en b
- Si f est croissante minorée alors f admet une limite à droite en a
- Si f est décroissante minorée alors f admet une limite à gauche en b
- Si f est décroissante majorée alors f admet une limite à droite en a

3 Continuité

3.1 Continuité d'une fonction en un point a ou sur un intervalle U

Continuïté à gauche et à droite

Il est indispensable de vérifier la limite à gauche qui doit être égale à f(a) et la limite à droite qui doit aussi être égale à f(a)

F est continue en a donc f est continue à gauche et à droite en a

3.1.1 Fonction continu sur un intervalle U

C'est à dire une fonction continue en tout réel a de U mais aussi continue sur les bornes de U, à droite pour la borne inf et à gauche pour la borne sup

On peut voir la continuïté d'une fonction si l'on peut tracer la courbe sans jamais lever le stylo.

3.1.2 Prolongement par continuïté d'une application

Si $\lim\limits_{x \to a} \overset{existe}{===} l$, l étant un réel, on dit que f est "prolongeable par continuïté à $E \cup a$"
Le prolongement par continuïté de f étant l'application $\tilde{f} : E \cup a \to \mathbb{R}$ et $x \to \tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $\tilde{f}(a) = l$

3.2 Continuïté et suites numériques

3.2.1 Relation avec les suites

Si f est continue en l alors la suite v_n de terme général $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(l)$

3.2.2 Le cas des fonctions Lipschitziennes

Toute fonction f définie et lipschitizienne sur un intervalle U est continue sur U

Toute fonction f définie et contractante sur un intervalle fermé [a,b] qu'elle stabilise, admet dans [a,b] un point fixe unique

3.3 Les théorèmes des valeurs intermédiaires et de la bijection

Ennoncé 1 (TVI) *Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b] alors*

$$\forall \gamma \in [f(a), f(b)], \exists \delta \in [a, b], \gamma = f(\delta)$$

Quelques propriétés
- si U est un intervalle fermé, alors f(U) est un intervalle fermé
- si U est un intervalle oouvert et si f est strictement monotone sur U alors f(U) est un intervalle ouvert

Ennoncé 1 (Théorème de la bijection) *Si f est une fonction définie, continue et strictement monotone sur U définit une bijection sur f(U)*

On notera que le sens de variation de g^{-1} est identique à celle de g

3.4 Fonctions obtenues par opérations sur des fonctions continues

Propriétés : f et g sont 2 fonctions simultanément continues sur un même intervalle U

- $af + bg$ est continue sur U
- $f.g$ et f^n est continue sur U
- $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ et g^n sont continues sur U

Propriétés :

- Si f est continue sur U et g sur V [1] alors gof est continue sur U
- Si f est continue sur U tel que U soit stable par f alors l'itéré de f est continue sur U

4 Dérivabilité

4.1 La dérivabilité en un point

4.1.1 Fonction f dérivable en x_0

Une fonction f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a_{x0} = f'(x_0)$, appelé nombre dérivé de f en x_0

4.1.2 Fonction f dérivable à gauche et à droite en x_0

Fonction f définie au moins sur un intervalle U et vérifiant pour tout réel h l'existance de la limite 4.1.1 avec $h \Rightarrow 0^+$ (à droite) et $h \Rightarrow 0^-$ (à gauche)

4.1.3 La non dérivabilité

- l'inexistance de l'une des limites unilatérales
- l'une des limites unilatérales est un infini
- les nombres dérivés de f à gauche et à droite sont distincts (On parle de point anguleux, là où les 2 demis tangentes sont distinctes)

4.1.4 Equation de la tangente à C_0au point $M_0(x_0, f(x_0))$

Lorsque f est dérivable en x_0 de nombre dérivé a_{x0}, l'équation est

$$y = a_{x0}.x - a_{x0}.x_0 + f(x_0)$$

Lorsque la dérivabilité du côté et prouvé, la demi tangente correspondante a pour équation

$$y = a_{x0.d/g}.x - a_{a=x0.d/g}.x_0 + f(x_0)$$

4.1.5 Lien avec la continuïté

f est dérivable en $x_0 \Rightarrow$ f est continue en x_0

4.1.6 La différentiabilité en x_0

Une fonction est différentiable en x_0 si il existe une fonction $df_a(h)$ autrement dit

$$\Delta f_{x0}(h) = f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0) + o(h) = df_{x0}(h) + o(h)$$

avec $df_{x0} : h \to f'(x_0).h$

Equivalence dérivabilité $\Leftrightarrow$ différentiabilité en un x_0

f est dérivable en x_0 de nombre dérivé a_{x0} de nombre dérivé a_{x0} $\Leftrightarrow$ f est différentiable en x_0

1. $f(u) \subset V$

4.2 La dérivabilité sur un intervalle

4.2.1 Fonction dérivable sur un intervalle U

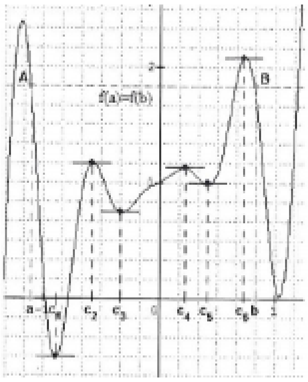
Fonction f définie sur U qui est
- dérivable en tout réel x de U autre qu'une borne de U
- dérivable du côté de l'intérieur de U en toute borne de U qui appartient à U

4.2.2 Recherche d'extrema locaux de f sur un intervalle]a,b[

Ces sont les solutions de f'(x)=0

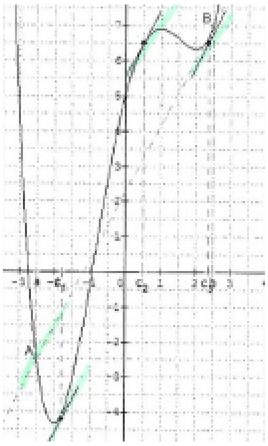
4.2.3 Le théorème de ROLLE

Si f est continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[, telle que f(a)=f(b) alors $\exists \psi \in]a, b[, f'(\psi) = 0$



4.2.4 le théorème des accroissement finis (TAF)

Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[alors, $\exists \psi \in]a, b[, f'(\psi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ [2]



Conséquences du TAF :$|f(b) - f(a)| \leq M.|b - a|$ alors f est M-lipschitzienne sur]a,b[

4.2.5 Le théorème de dérivabilité aux bornes

- Soit f une fonction dérivable sur $]x_0 - \alpha, x_0[$ continue sur $]x_0 - \alpha, x_0[$ et $\lim_{x \to x_0} f'(x) \overset{existe}{===} l$ alors f est dérivable à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = l$
- Même principe à droite avec l'intervalle $[x_0, x_0 + \alpha[$
- Si f est :
  - Prolongeable par continuité à $E \cup \{a\}$
  - Dérivable sur le ou les intervalles ouverts inclus dans E, dont a est une borne
  - Telle que $\lim_{x \to a} f'(x) \overset{existe}{===} l$

  Alors le prolongement continu $\tilde{f}$ de f est dérivable en a et $\tilde{f}'(a) = l$ [3]

2. ROLLE étendu
3. $(f^n)' = \prod_{k=0}^{n-1} f' o f^k$

4.3 Dérivations successives

4.3.1 Dérivée d'ordre n de fonctions obtenues par opérations sur des fonctions dérivables

Formule de Leibniz :

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}$$

Classe $C^k(U)$: C'est l'ensemble des fonctions k fois dérivables, telles que leur dérivée d'ordre k, $f^{(k)}$ soit continue sur U

Classe $C^\infty(U)$: C'est l'ensemble des fonctions définies sur U, à valeurs réelles qui sont dérivables sur U à tout ordre

4.4 Règles de l'Hopital

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'} = \lim \frac{f''}{g''}$$

5 Développements limités

5.1 Construction du $DL_n(x_0)$ d'une fonction de classe C^n sur un voisinage de x_0

Formule de Taylor avec reste de Young : le $DL_n(x_0)$ de f s'exprime par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

f admet un $DL_n(x_0)$ si :
— $\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0$
— Si de plus f est dérivable en x_0 et vérifie $f'(x_0) = a_1$

5.2 $DL_n(0)$ d'une fonction paire ou impaire

Si f est impaire alors il ne reste que les puissances impaires de x.

S f est paire alors il ne reste que les puissances paires de x.

5.3 Les développements limités à connaitre

Base	$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + x^n + o(x^n)$
-x remplace x	$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n + o(n^n)$
Primitive du précédent	$ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
x^2 remplace x dans $\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$
Primitive du précédent	$Arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

Base	e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
Partie paire	$ch(x)$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
Partie Impaire	$sh(x)$	$1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$= ch(ix)$	$cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$= sh(ix)$	$sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

5.4 Applications

Calcul d'un équivalent de fonction en un point.

Calcul d'une limite en un point.

Approximation d'une fonction en une valeur.

Table des matières