Cours 3/2/21

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Th Bouton (cont.)

3 2 1 1 2

$(n_1, \dots, n_p) \in W$ (gagnant pour P_1)

$\Leftrightarrow n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_p \neq 0$

W / L : gagnant / perdant pour le joueur à qui c'est le tour

Caractérisation de W / L (pour jeu fini) :

- toute position de jeu qui n'a aucun successeur est dans L

$p = (0, \dots, 0) \in L$ pour NIM

- $\forall$ position p :

$p \in W$ s'il <u>existe</u> p' tq.

$p \to p'$ et $p' \in L$

$p \in L$ ssi <u>pour tout</u> p' tq.

$p \to p'$: $p' \in W$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

On montre :

$$W = \{ (n_1, \dots, n_p) : n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_p \neq 0 \}$$

On utilise la caractérisation de W, L :

1) $p = (0, \dots, 0) \in L$: $0 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } 0 = 0$

2) a) $p = (n_1, \dots, n_p) \in L$

On montre : $\forall\, p \to p' : p' \in W$

$p' = (n_1, \dots, m_i, \dots, n_p)$

($p \to p'$: modifie le bit i)

$m_i < n_i$

$K := n_1 \text{ XOR } n_2 \dots \text{ XOR } n_{i-1} \text{ XOR } n_{i+1} \dots \text{ XOR } n_p$

$K \text{ XOR } n_i = 0 \iff K = n_i$

Selon hypothèse : $n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_p = 0$

$K \text{ XOR } m_i \neq 0$ car

$m_i \neq n_i \Rightarrow p' \in W$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

b) $p = (n_1, \dots, n_p) \in W$

On veut trouver $p \to p' \in L$

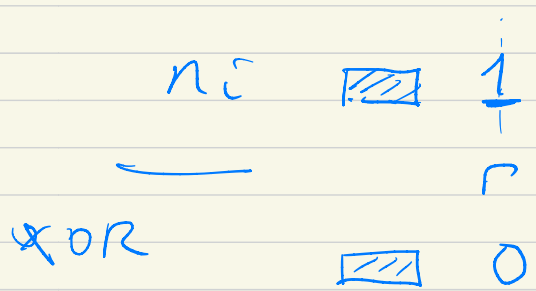
On sait : $\underbrace{n_1 \text{ XOR} \dots \text{ XOR } n_p}_{a} \neq 0$

Soit r le bit le plus fort de a, différent de 0.

Il doit exister un n_i tq. le bit de n_i à la position r est 1.

n_i XOR a $= m_i < n_i$

1100 1101 = 10...



Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Dans p, le joueur joue pour arriver dans $p' = (n_1, .., \underline{m_i}, .. n_p)$

(prend $n_i - m_i$ jetons dans i)

On veut montrer : $p' \in L$

n_1 XOR .. n_{i-1} XOR $\underline{m_i}$ XOR n_{i+1} .. n_p

$= n_1$ XOR .. n_{i-1} XOR $(a$ XOR $n_i)$ XOR

n_{i+1} .. n_p $= a$ XOR $a = 0$

$p = (10, 1, 6, 3, 8)$

1010 1 1 10 11 1000

XOR $a = \underline{110} \neq 0 \rightarrow$ W

$r = 2$

2 1 0

110 XOR a = 110 XOR 110 = 0

$p' = (10, 1, 0, 3, 8) \xrightarrow{XOR} 0 \in L$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$p' = (10, 1, 0, 3, 8) \quad \in L$

↓

$p'' = (10, 1, 0, 3, 5)$

p' 1010 1010 n_1

1 1

11 11

1000 101

0000 $1101 = a$

L W

$n_1 \text{ XOR } a = 111 < n_1$

m_1

→ $p'' = (7, 1, 0, 3, 5) \in L$

111

1

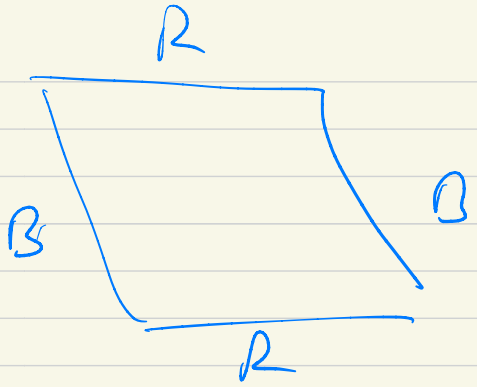
11

101

XOR 000

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

HEX



R et B alternent

R pose jetons rouges

B bleues

R gagne si elle construit une ligne rouge N-S

B gagne si il ... une ligne bleue O-E

- Le jeu est fini.
- Il ne peut pas y avoir de parties indécises. (à montrer)

Donc HEX est <u>déterminé</u>.

Ça veut dire : soit R ou B gagne.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Th Le joueur qui commence a une stratégie gagnante.

Supposons que R commence.

On montre par l'absurde que R gagne ("vol de stratégie").

Supposons que B a une stratégie gagnante σ.

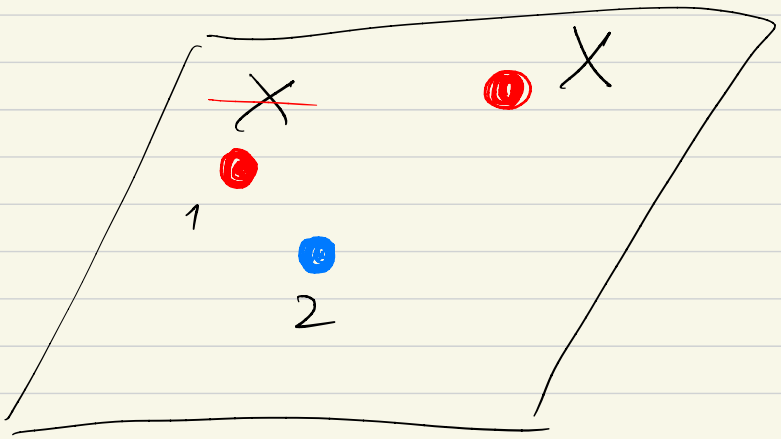
On déf. une stratégie σ' pour R.

- R commence par coup arbitraire, qu'on marque par X.
- B joue son premier coup
- A partir d'ici, R joue σ.

Si σ lui dit de jouer à

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

la place X, alors R choisit arbitrairement une place libre, pose ce jeton, et cette place devient le nouveau X.



$\tau \longrightarrow 1$

A chaque instant, les jetons de R, sauf X, sont conformes à τ.

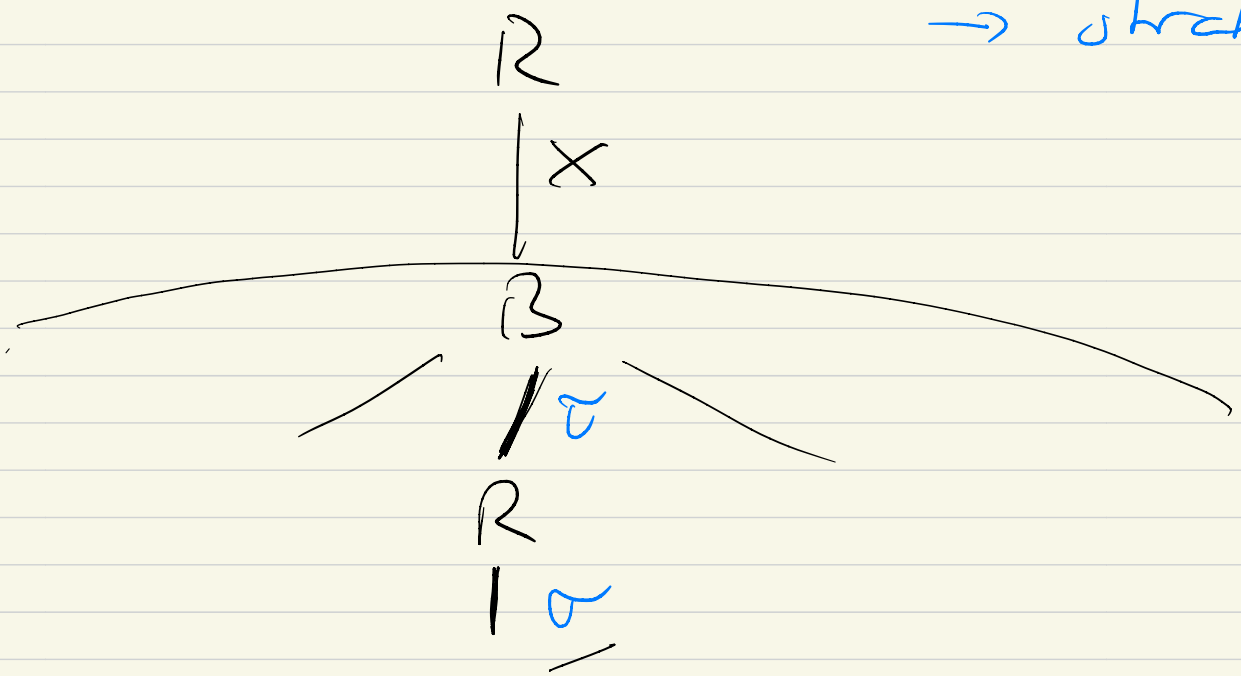
R joue τ "en tant que 2ème joueur".

On montre que σ' est gagnante pour R.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Supposons par l'absurde que σ' n'est pas gagnante pour R.
Ça veut dire qu'il ex. une stratégie gagnante pour B, car le jeu est déterminé.

→ stratégie τ



R joue en respectant σ (sauf pour X)
X rend le rôle de B plus difficile mais B gagne avec τ !

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Si X ne serait pas sur le tableau :

— B gagnerait toujours avec τ

— R joue σ, en tant que 2ème joueur.

⟶ contradiction avec l'hypothèse que σ est stratégie gagnante pour le 2ème joueur.

⟹ σ est gagnante pour R !

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Dans HEX il n'y a pas de partie indécise :

si le tablier est rempli par jetons, alors soit il ex. un chemin rouge N-S, ou un chemin bleu O-E.

On va construire un tel chemin par l'algorithme suivant :

- on commence dans le coin Sud-Ouest.
- on se balade au long des arêtes des hexagones, en respectant l'invariant

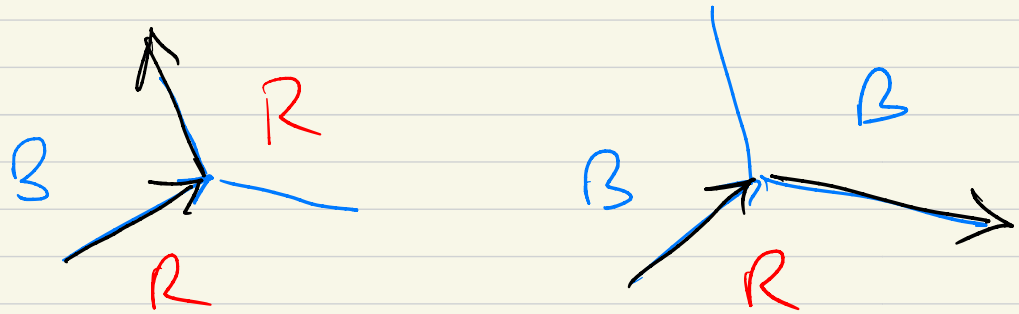
Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

qui dit qu'il faut voir

B à gauche et

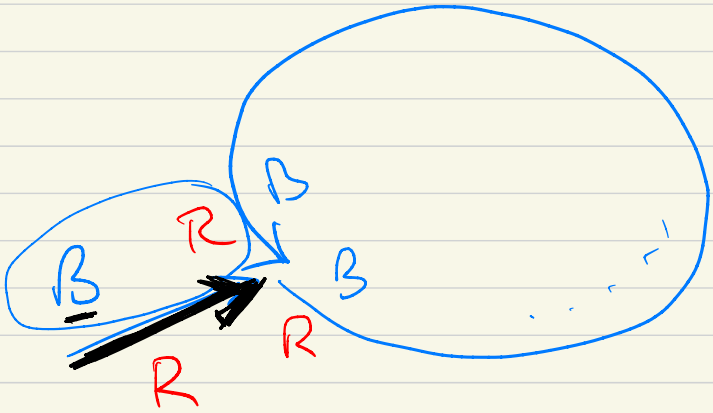
R à droite de l'arrete

actuelle



1) Ce chemin ne peut pas

contenir une boucle :



2) Ce chemin n'arrêtera jamais sur

E ou sur N.

d_B → R gagne

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0