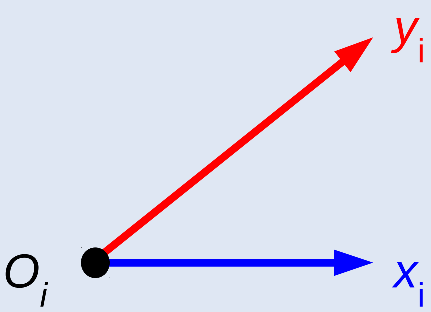
Mouvements, changements de coordonnées

- Repère affine
  - Coordonnées d'un point *P* , d'un vecteur *v*
  - Changement de coordonnées
  - Cas d'un point
  - Cas d'un vecteur
- Système de coordonnées homogènes
  - Matrice de transformation homogène
  - Transformations élémentaires
  - Succession de transformations
  - Transformations / repère quelconque
- exercices

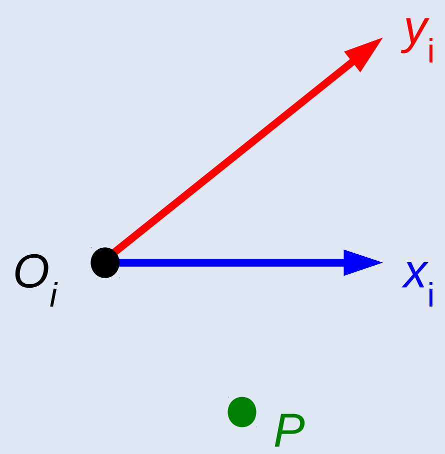
Repère Affine $[O_i, R_i = \{x_i, y_i, z_i\}]$

- Repère Affine [coordinate frame]
  - Système d'axes $R_i = \{ x_i, y_i, z_i \}$
  - Muni d'une origine O_i



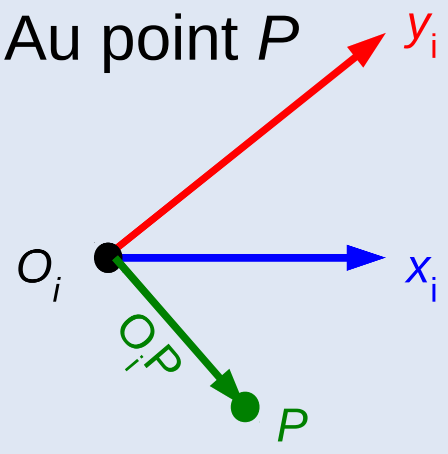
Coordonnées d'un point P

- Point P
  - Point dans l'espace



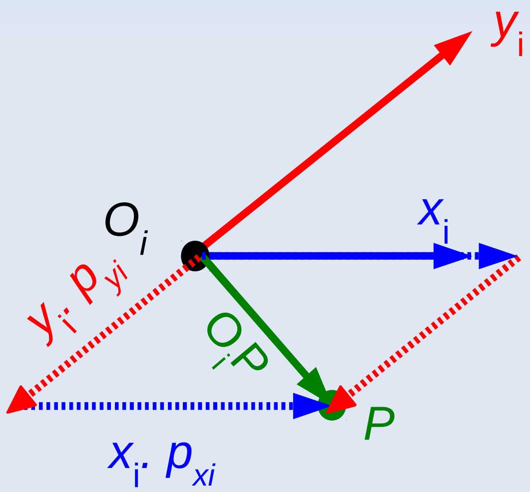
Coordonnées d'un point P

- Vecteur O_iP
  - Vecteur reliant
    - L'origine O_i du repère i
    - Au point *P*



Coordonnées d'un point P

- On peut écrire de façon unique :
- $O_iP = x_i . p_{xi} + y_i . p_{yi} + z_i . p_{zi}$



- p_{xi} , p_{yi} , p_{zi} localisent *P* dans le repère Oi ,{ x_i, y_i , z_i }
- Ce sont les **coordonnées de *P* dans le repère *i***

Coordonnées d'un point P

- Le vecteur colonne : $${}^{i}P = P^{i} = \begin{bmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ p_{zi} \end{bmatrix}$$

Représente le (et est appelé)

- vecteur des coordonnées du point *P* dans le repère *i*

$$P^{i} = \begin{bmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ p_{zi} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_i P} = \vec{x}_i \cdot p_{xi} + \vec{y}_i \cdot p_{yi} + \vec{z}_i \cdot p_{zi}$$

Coordonnées d'un vecteur v

- Soit v un vecteur, tel que

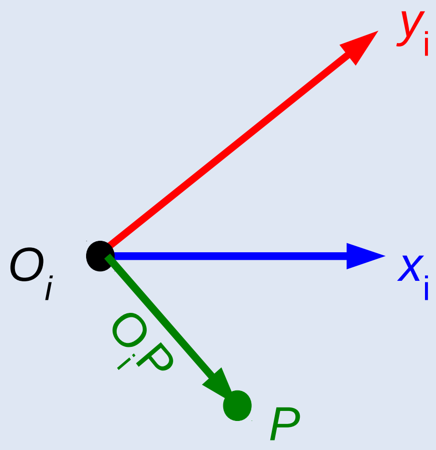
$$\vec{v}=\vec{x}_i . v_{xi}+\vec{y}_i . v_{yi}+\vec{z}_i . v_{zi}$$

- La quantité $^{i}v=\begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{bmatrix}$ représente le vecteur des coordonnées du vecteur v dans le repère *i*

Coordonnées d'un point P

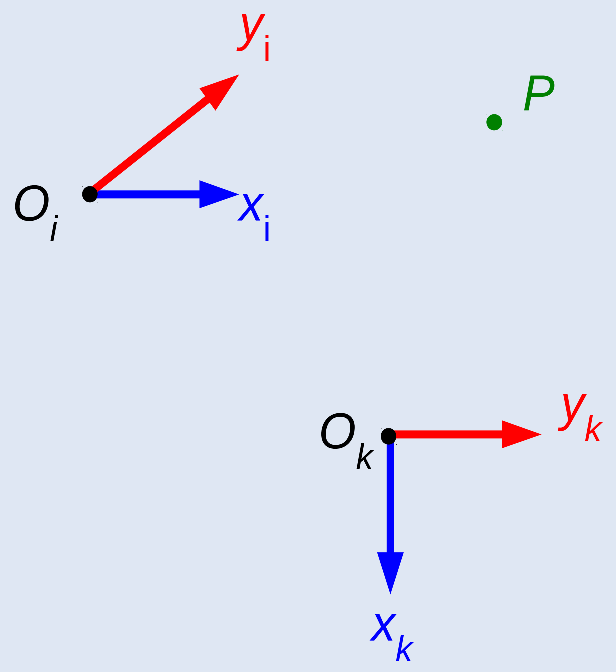
- Les coordonnées du point *P*, dans le repère i, d'origine Oi sont aussi les coordonnées du vecteur O_iP, exprimées dans le repère *i*

$$^{i}P = {}^{i}\overrightarrow{O_i P}$$



Changement de coordonnées

- 2 repères affines, et un point P
  - Repère i : O_i , $\{ x_i, y_i , z_i \}$
  - Repère k : O_k , $\{ x_k, y_k , z_k \}$

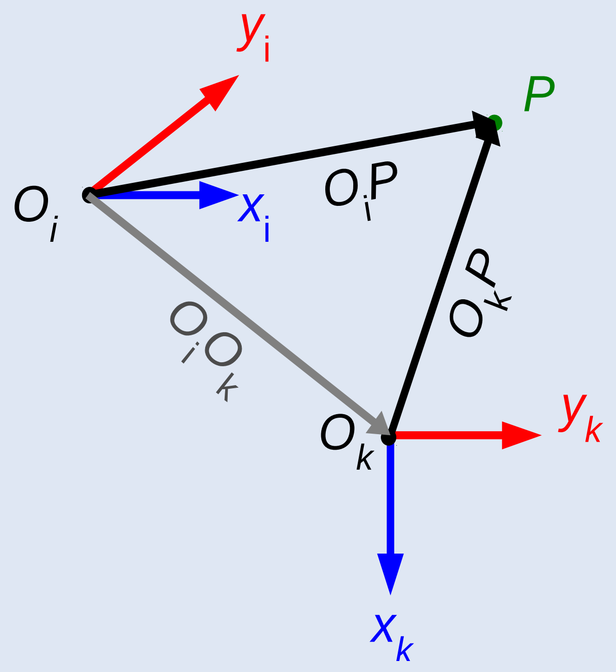


Changement de coordonnées

- OBJECTIF : Exprimer ${}^{i}P = f\,({}^{k}P)$

$$ {}^{i}P = \begin{vmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ p_{zi} \end{vmatrix} = {}^{i}\overrightarrow{O_i P} $$

$$ {}^{k}P = \begin{vmatrix} p_{xk} \\ p_{yk} \\ p_{zk} \end{vmatrix} = {}^{k}\overrightarrow{O_k P} $$

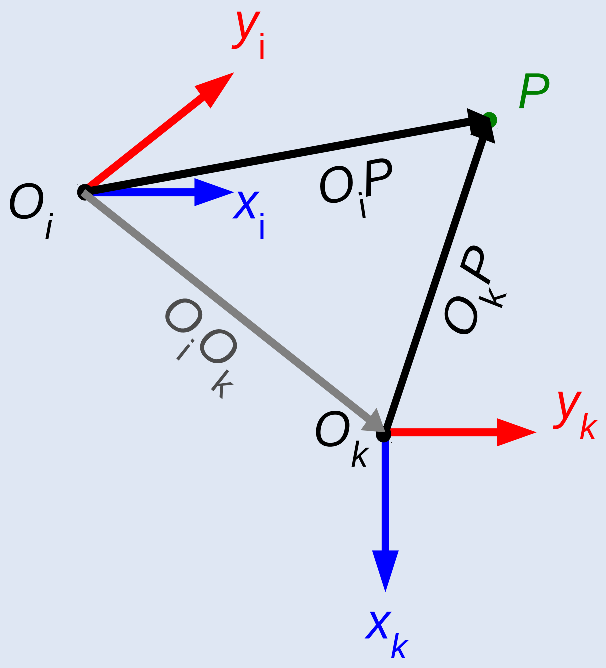


$P^i = f(P^k) = ?...$

- Phase 1 : loi de Chasles

$$\overrightarrow{O_i P} = \overrightarrow{O_i O_k} + \overrightarrow{O_k O_P}$$

$$\overrightarrow{O_i P} = \vec{x}_k . p_{xk} + \vec{y}_k . p_{yk} + \vec{z}_k . p_{zk} + \overrightarrow{O_i O_k} . 1$$



Cas d'un Point : $P^i = f(P^k) = ?...$

- Phase 2 : Expression dans le repère i

$$ {}^{i}\overrightarrow{O_i P} = {}^{i}\vec{x}_k \cdot p_{xk} + {}^{i}\vec{y}_k \cdot p_{yk} + {}^{i}\vec{z}_k \cdot p_{zk} + {}^{i}\overrightarrow{O_i O_k} \cdot 1 $$

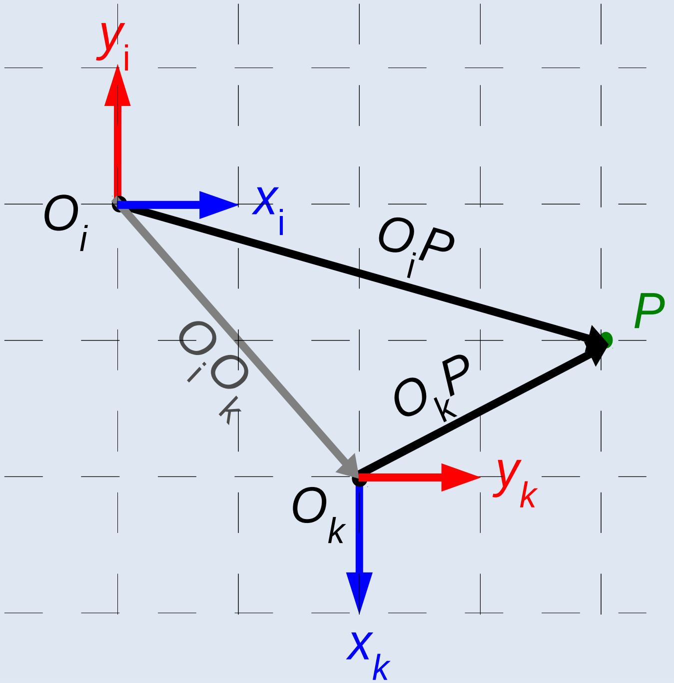
- Phase 3 : Ecriture matricielle $\boxed{{}^{i}P = {}^{i}R_k \cdot {}^{k}P + {}^{i}O_k}$

$$ {}^{i}P = \underbrace{\left[{}^{i}x_k , {}^{i}y_k , {}^{i}z_k \right]}_{{}^{i}R_k} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} p_{xk} \\ p_{yk} \\ p_{zk} \end{bmatrix}}_{{}^{k}P} + {}^{i}O_k \cdot 1 = {}^{i}R_k \cdot {}^{k}P + {}^{i}O_k $$

Exemple, Compléter

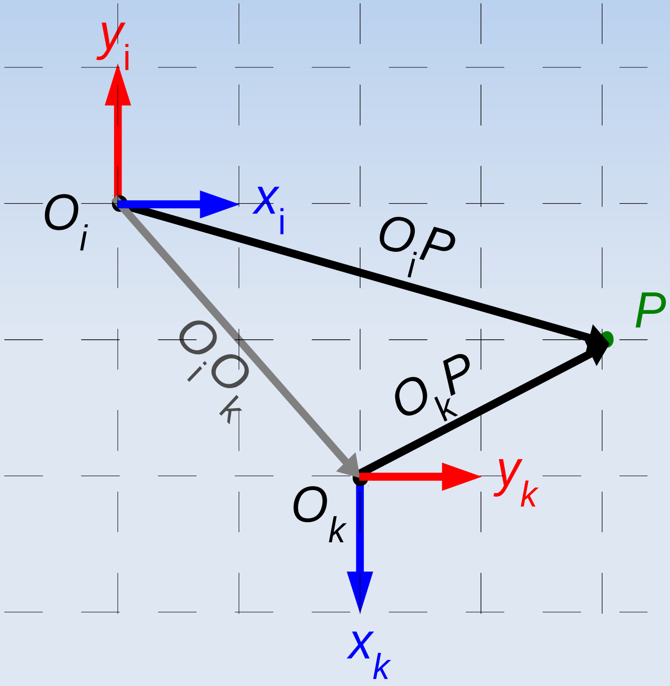
- $$ {}^{i}R_k = \begin{array}{c} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \\ \vec{x}_k \quad \vec{y}_k \quad \vec{z}_k \end{array} , \quad {}^{i}O_k = \begin{array}{c} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{O_i O_k} \end{array} $$

$$ {}^{k}P = \begin{array}{c} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{O_k P} \end{array} , \quad {}^{i}P = \begin{array}{c} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{O_i P} \end{array} $$



Exemple, Calculer

- $${}^{i}P = {}^{i}R_{k} \cdot {}^{k}P + {}^{i}O_{k}$$



Cas d'un vecteur

- Expression de *v* dans le repère *i*, connaissant *v* dans le repère *k*

$$^i\vec{v} = {}^i\vec{x}_k \cdot v_{xk} + {}^i\vec{y}_k \cdot v_{yk} + {}^i\vec{z}_k \cdot v_{zk}$$

$$\boxed{^i\vec{v} = {}^iR_k \cdot {}^k\vec{v}}$$

- Ecriture matricielle

$$^iv = \underbrace{\left[{}^ix_k, {}^iy_k, {}^iz_k\right]}_{^iR_k} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_{xk} \\ v_{yk} \\ v_{zk} \end{bmatrix}}_{^kv} = {}^iR_k \cdot {}^kv$$

coordonnées homogènes

- Unification des changements de coordonnées
  - Pour les points *P (avec chgt d'origine)*
  - Pour les vecteurs *v (sans chgt d'origine)*
- Les deux équations fondamentales
  - Point *P*

$$^{i}P = {}^{i}R_{k} . {}^{k}P + {}^{i}O_{k} . 1$$

  - Vecteur *v*

$$^{i}v = {}^{i}R_{k} . {}^{k}v + {}^{i}O_{k} . 0$$

Construction, phase 1

- Factorisation *à droite des équations*
  - Point P

$$ {}^{i}P = {}^{i}R_{k} . {}^{k}P + {}^{i}O_{k} . 1 = \begin{bmatrix} {}^{i}R_{k} & {}^{i}O_{k} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} {}^{k}P \\ 1 \end{bmatrix} $$

  - Vecteur V

$$ {}^{i}v = {}^{i}R_{k} . {}^{k}v + {}^{i}O_{k} . 0 = \begin{bmatrix} {}^{i}R_{k} & {}^{i}O_{k} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} {}^{k}v \\ 0 \end{bmatrix} $$

- À gauche du produit :même matrice en facteur
- À droite du produit, seule la 4ème ligne diffère :
  - Le 1 indique un point *P*
  - Le 0 indique un vecteur *v*

Construction, phase 2

- On invente un système de coordonnées homogènes, à 4 dimensions
  - Point *P* : codé avec un 1 en ligne 4, on obtient

$$\begin{bmatrix} {}^{i}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{i}R_k & {}^{i}O_k \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} {}^{k}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - Vecteur *v* : codé avec un 0 en ligne 4, on obtient

$$\begin{bmatrix} {}^{i}v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{i}R_k & {}^{i}O_k \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} {}^{k}v \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice de transformation homogène, propriété

- La matrice de transformation homogène du repère *i* vers le repère *k*, notée ${}^{i}T_{k}$, est définie par :

$$ {}^{i}T_{k} = \begin{bmatrix} {}^{i}R_{k} & {}^{i}O_{k} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{i}\vec{x}_{k} & {}^{i}\vec{y}_{k} & {}^{i}\vec{z}_{k} & {}^{i}\overrightarrow{O_{i}O_{k}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- Pour tout point *P*

$$ \begin{bmatrix} {}^{i}P \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{i}T_{k} \cdot \begin{bmatrix} {}^{k}P \\ 1 \end{bmatrix} $$

- Pour tout vecteur *v*

$$ \begin{bmatrix} {}^{i}v \\ 0 \end{bmatrix} = {}^{i}T_{k} \cdot \begin{bmatrix} {}^{k}v \\ 0 \end{bmatrix} $$

propriétés

- 1- changements de repères <=> multiplication

$$\forall m : {}^{i}T_{k} = {}^{i}T_{m} . {}^{m}T_{k}$$

- 2- Changement de repère inverse

$$\forall i : {}^{i}T_{i} = Id_{4}$$

$$\xcancel{{}^{k}T_{i} = \left[{}^{i}T_{k} \right]^{-1}}$$

NE PAS EMPLOYER
SOUS CETTE FORME

Inverse , cas général

- Détail de La matrice de transformation inverse

$$ {}^{k}T_{i} = \begin{bmatrix} \left[{}^{i}R_{k}\right]^{-1} & -\left[{}^{i}R_{k}\right]^{-1} . {}^{i}O_{k} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 1 \end{bmatrix} $$

- Ne jamais employer cette forme(bis)
  - (couteux) Calcul d'inverse dans R^{3X3}
  - Non conservation de la distance euclidienne

Inverse, cas orthogonal

- On se limite au cas où ${}^{i}R_{k}$ est orthogonale

<=> $$\left[{}^{i}R_{k}\right]^{-1}=\left[{}^{i}R_{k}\right]^{T}$$

- La matrice de transformation inverse devient

$$ {}^{k}T_{i}=\begin{bmatrix} {}^{k}R_{i}=\left[{}^{i}R_{k}\right]^{T} & {}^{k}O_{i}=-{}^{k}R_{i}.{}^{i}O_{k} \\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix} & 1 \end{bmatrix} $$

Produit scalaire (dot product)

- Soit un repère *i* dont les axes x_i,y_i,z_i sont
  - Orthogonaux entre eux
  - De longueur unité

- Alors, pour tous vecteurs v, w,
  le produit scalaire euclidien v.w
  peut être calculé depuis les coordonnées ${}^{i}v$, ${}^{i}w$
  , par :

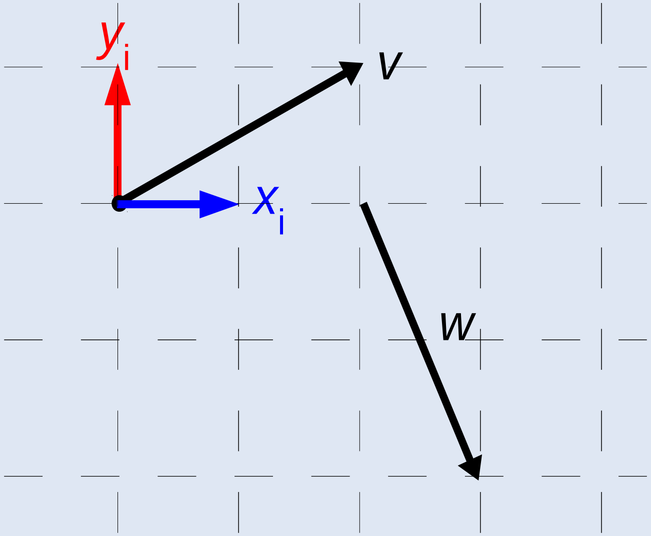
$$\vec{v}.\vec{w}=\left[{}^{i}v\right]^{T}.{}^{i}w=v_{xi}.w_{xi}+v_{yi}.w_{yi}+v_{zi}.w_{zi}$$

Produit scalaire (dot product)

- Notions fondamentales
  - Longueur (norme euclidienne)

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}\,.\,\vec{v} = \left[{}^i v\right]^T .\,{}^i v = v_{xi}\,.\,v_{xi} + v_{yi}\,.\,v_{yi} + v_{zi}\,.\,v_{zi}$$

- Orthogonalité entre *v* et *w*



$$\vec{v}\,.\,\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \left[{}^i v\right]^T .\,{}^i w = 0$$

Base orthonormée

- QUESTION : Comment repérer une Base ortho-normée,

  $$\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k$$

- depuis les coordonnées ?

  $$^i[\vec{x}_k], ^i[\vec{y}_k], ^i[\vec{z}_k]$$

- REPONSE(S) :
  - Normée <=> $^i[\vec{x}_k]^T . ^i[\vec{x}_k] = 1, \ldots$
  - Orthogonale <=> $^i[\vec{x}_k]^T . ^i[\vec{y}_k] = 0, \ldots$

Base orthonormée

- QUESTION : Comment repérer une Base ortho-normée, $\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k$
  - Directement depuis la matrice

$$^iR_k = \left[{}^i\vec{x}_k, {}^i\vec{y}_k, {}^i\vec{z}_k \right]$$

- 3 REPONSES EQUIVALENTES :
  - ^iR_k EST ORTHOGONALE : $\left[{}^iR_k \right]^T = \left[{}^iR_k \right]^{-1}$

$$\left[{}^iR_k \right]^T . {}^iR_k = Id_3 \qquad {}^iR_k . \left[{}^iR_k \right]^T = Id_3$$

Type des transformations retenues : groupe SO(3)

- Les matrices de transformations homogènes intéressantes en robotique emploient des matrices ${}^{i}R_k$ orthogonales :

$$ {}^{i}T_k = \begin{bmatrix} {}^{i}R_k & {}^{i}O_k \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[{}^{i}R_k\right]^T = \left[{}^{i}R_k\right]^{-1} $$

- Cela correspond à employer uniquement des changements de repères qui ne modifient ni la longueur, ni l'orthogonalité(* ni le sens) des axes
  - Translations , rotations
  - ~~Symetries~~ (* $det\left({}^{i}R_k\right)=1$)

Succession de transformations

- Modèle géométrique d'un robot
  - Passage du repère 0 (world) au repère *n (* outil) $^{0}T_{n}$
  - Passage du repère n (outil) au repère *0*,(world) $^{n}T_{0}$
- Calcul par série de transformations élémentaires
  - Du repère 0 au repère 1 : $^{0}T_{1}$
  - Du repère 1 au repère 2 : $^{1}T_{2}$
  - Du repère 0 au repère n : $^{0}T_{n} = {}^{0}T_{1} \,.\, {}^{1}T_{2} \,....\, {}^{n-1}T_{n}$
  - Du repère n au repère 0 : $^{n}T_{0} = [\, {}^{0}T_{n} \,]^{-1}$

4 (ou 2)transformations élémentaires

Translation

Rotation / x

$$ {}^{i}T_{i+1} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{i}T_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{i}T_{i+1} = \begin{bmatrix} c & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{i}T_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Rotation / y

Rotation / z

Transformation par rapport à un repère quelconque

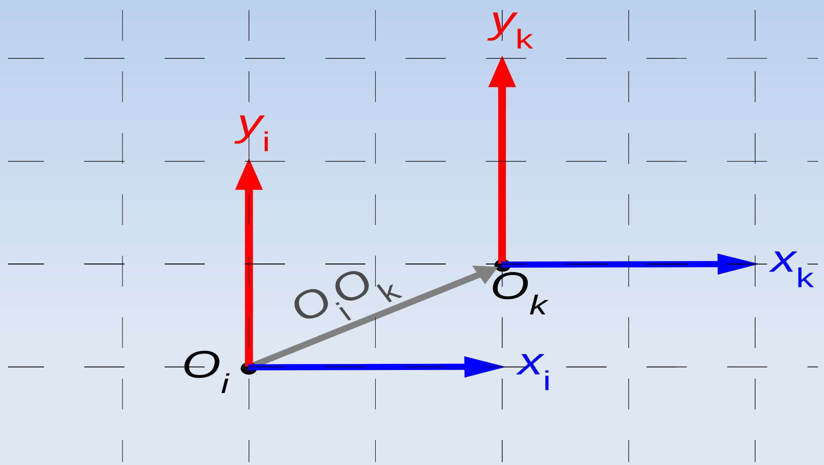
- Transformation ${}^{i}T_{i+1}$
  - Bien adaptée pour décrire des Tr. / au repère i
    - Ex: trans / xi,yi,zi , rot / xi,yi,zi
  - Mal adaptée pour décrire des Tr. / à un autre repère
    - Ex: trans / xk,yk,zk , rot / xk,yk,zk
- Analyse (transformation semblable):
  - Soit T_{simple} : la Tr. exprimée dans le repère *k*
  - Alors : ${}^{i}T_{i+1} = {}^{i}T_{k} \cdot T_{simple} \cdot {}^{k}T_{i} = T_{compliquée}$

Transformation par rapport à un repère quelconque

- Calcul direct par multiplication à gauche :
  - ${}^{K}T_{i+1} = T_{simple} \; . \; {}^{k}T_{i}$
- Demonstration (inversion de causalité)
  - ${}^{k}T_{i+1} = {}^{k}T_{i} \; . \; [\, {}^{i}T_{i+1} \,] = {}^{k}T_{i} \; . \; [\, {}^{i}T_{k} \; . \; T_{simple} \; . {}^{k}T_{i} \,]$
- Application principale : k=0, (world frame)
  - Rot /x0,y0,z0 : Multiplier à gauche par T ($\neq$ ${}^{i}T_{i+1}$)
  - Rot /xi,yi,zi : Multiplier à droite par T (=${}^{i}T_{i+1}$)

1-Trans$_{ax,ay,az}$:Translation

- Translation :



$$
{}^{i}T_{k} = \begin{array}{c} \\ \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cccc} \vec{x}_k & \vec{y}_k & \vec{z}_k & \overrightarrow{O_iO_k} \\ \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
{}^{i}T_{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & {}^{x_i}\overrightarrow{O_iO_k} = x \\ 0 & 1 & 0 & {}^{y_i}\overrightarrow{O_iO_k} = y \\ 0 & 0 & 1 & {}^{z_i}\overrightarrow{O_iO_k} = z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

2-Rot$_{z,\theta}$: Rotation /z

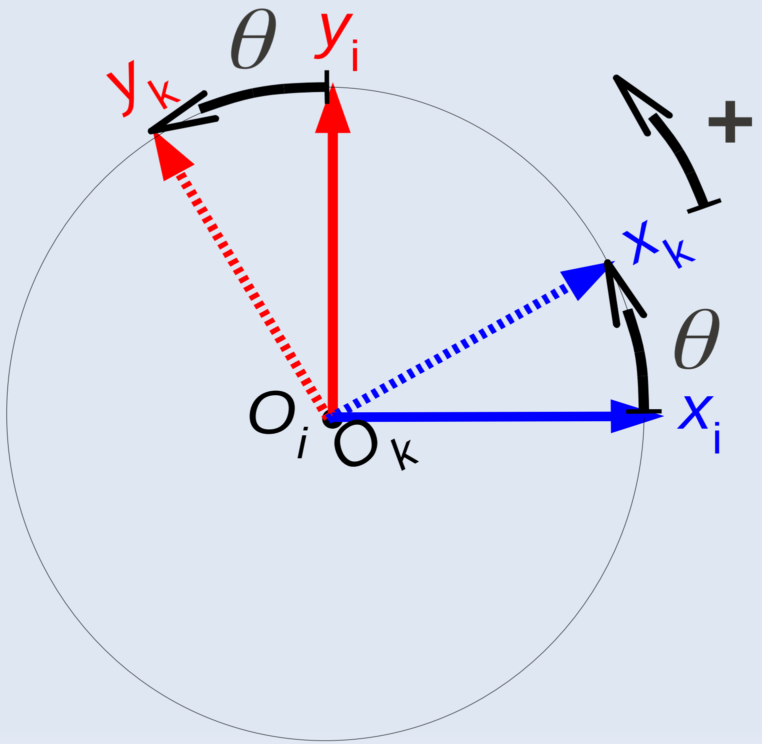
- Rotation autour de l'axe $O_i, \vec{z}_i$: sens + de $\vec{x}_i$ vers $\vec{y}_i$

$$\vec{z}_k = \vec{z}_i$$

$$\vec{x}_k = \vec{x}_i . \cos(\theta) + \vec{y}_i . \sin(\theta)$$

$$\vec{y}_k = \vec{x}_i . -\sin(\theta) + \vec{y}_i . \cos(\theta)$$

$${}^iT_k = \begin{vmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



3-Rot$_{x,\theta}$: Rotation /x

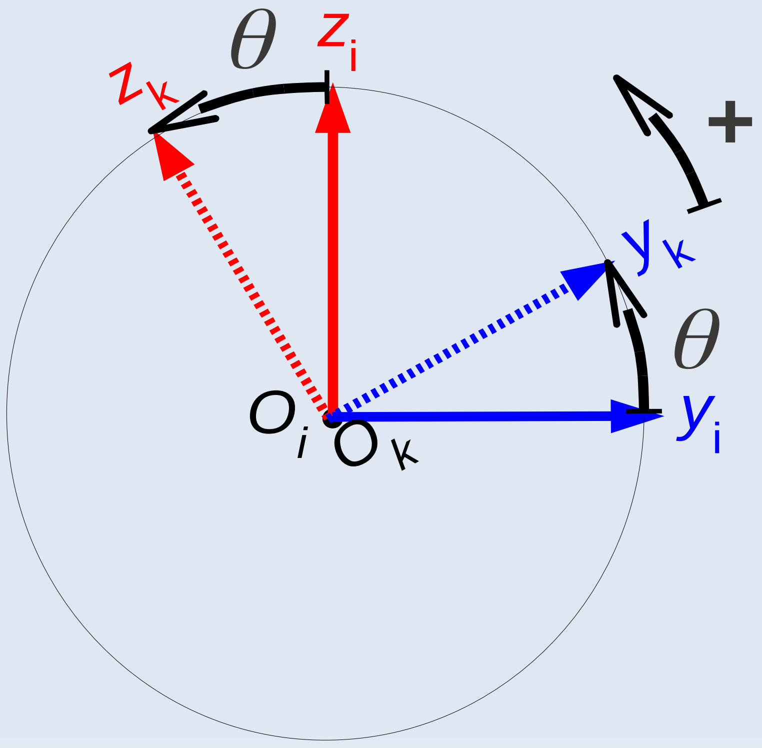
- Rotation autour de l'axe $O_i, \vec{x}_i$: sens + de $\vec{y}_i$ vers $\vec{z}_i$

$$\vec{x}_k = \vec{x}_i$$

$$\vec{y}_k = \vec{y}_i . \cos(\theta) + \vec{z}_i . \sin(\theta)$$

$$\vec{z}_k = \vec{y}_i . -\sin(\theta) + \vec{z}_i . \cos(\theta)$$

$$^{i}T_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



4-Rot$_{y,\theta}$: Rotation /y

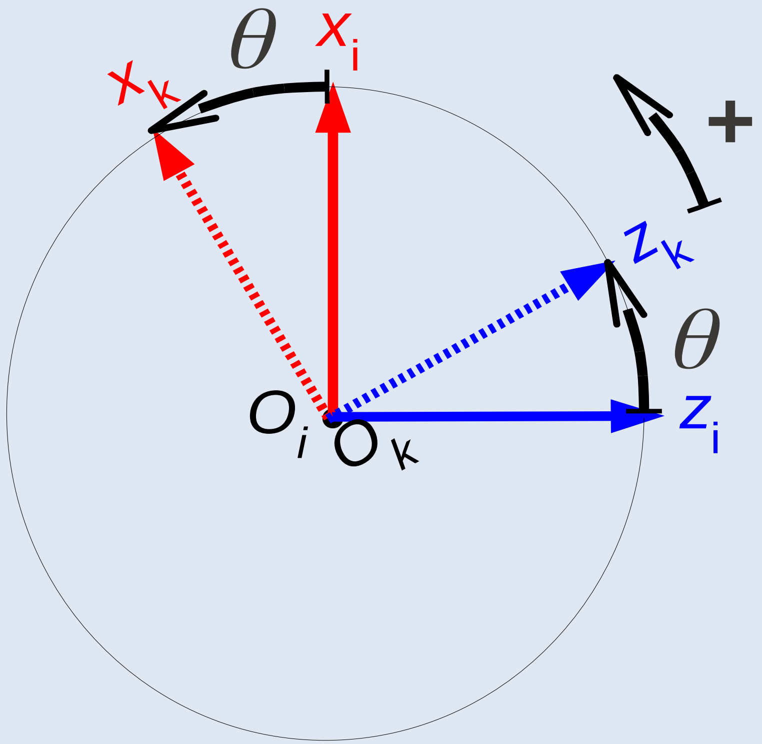
- Rotation autour de l'axe $O_i, \vec{y}_i$: sens + de $\vec{z}_i$ vers $\vec{x}_i$

$$\vec{y}_k = \vec{y}_i$$

$$\vec{z}_k = \vec{z}_i . \cos(\theta) + \vec{x}_i . \sin(\theta)$$

$$\vec{x}_k = \vec{z}_i . -\sin(\theta) + \vec{x}_i . \cos(\theta)$$

$$^{i}T_{k} = \begin{vmatrix} c & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



4-1Matrice anti-symétrique S liée au produit vectoriel

- Soient 2 vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$, et leur produit vectoriel

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

- Expression dans un repère k (orthonormé direct) :

<=> multiplication à gauche par la matrice S(^{k}a)

$$^k\vec{c} = \begin{bmatrix} c_{xk} \\ c_{yk} \\ c_{zk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{yk}.b_{zk} - a_{zk}.b_{yk} \\ a_{zk}.b_{xk} - a_{xk}.b_{zk} \\ a_{xk}.b_{yk} - a_{yk}.b_{xk} \end{bmatrix} = \underbrace{S\left({}^k\vec{a}\right)}_{\text{matrice } 3\times3} \, . \, \underbrace{{}^k\vec{b}}_{3\times1}$$

avec :

$$S\left({}^k\vec{a}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -a_{zk} & a_{yk} \\ a_{zk} & 0 & -a_{xk} \\ -a_{yk} & a_{xk} & 0 \end{bmatrix}$$

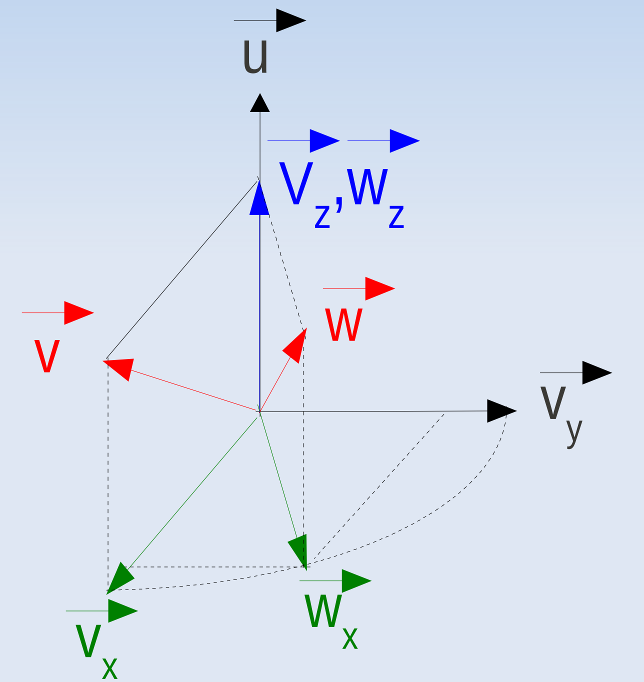
4-2 Rotation autour d'un axe quelconque Formule de Rodrigues

- On peut représenter une rotation vectorielle d'un angle θ autour d'un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$, par le vecteur $\vec{u}.\theta$

$$w = \overbrace{v_x.\cos(\theta) + v_y.\sin(\theta)}^{w_x} + v_u$$

$$\begin{cases} v_u = u.[u^t.v] = [u.u^T].v \\ v_x = v - v_u = [Id - u.u^T].v \\ v_y = u \times v_x = u \times v = s(u).v \end{cases}$$

Raisonnement sur les coordonnées dans un repère k, non précisé pour simplifier la lecture)



$\vec{w}$ est l'image de $\vec{v}$ par la rotation autour de $\vec{u}$

- Formule d'Olindes Rodrigues

$$w = \underbrace{\left[u.u^T.(1-\cos(\theta)) + Id_{3\times3}.\cos(\theta) + S(u).\sin(\theta)\right]}_{\text{matrice de rotation } {}^kR\text{, exprimée dans le repère k}}.v$$

4-2 Rotation autour d'un axe quelconque Formules

- u=f(R): *rotm2axang*, *get_u (attention pour 0°,180°)*

$$\begin{cases} \theta = acos\left(\dfrac{(R_{11}+R_{22}+R_{33}-1)}{2}\right) \\ u_1 = \dfrac{(R_{32}-R_{23})}{2\sin(\theta)} \\ u_2 = \dfrac{(R_{13}-R_{31})}{2\sin(\theta)} \\ u_3 = \dfrac{(R_{21}-R_{12})}{2\sin(\theta)} \end{cases}$$

- R=f(U) : *axang2rotm*, *get_rot_u(pas de restriction)*

$$w = \underbrace{\left[u.u^T.(1-\cos(\theta)) + Id_{3\times 3}.\cos(\theta) + S(u).\sin(\theta)\right]}_{\text{matrice de rotation } {}^kR\text{, exprimée dans le repère k}}.v$$

Exercice 1 :Calcul formel (Maxima)

- Ecrire et tester les fonctions elementaires : rotx(theta) , roty(theta) , rotz(theta) , trans(x,y,z) , getO(T) , getR(T) , invT(T) [guide de survie : *aide_maxima.mac*]

```
/* exemple 1: fonction rotx */

rotx(th):=matrix(

  [1, 0      ,0        ,0],

  [0,cos(th),-sin(th),0],

  [0,sin(th), cos(th),0],

  [0, 0      , 0       ,1]

)$
```

```
/* exemple 2 : inverse de Tij*/

invT(Tij):=block(

  [ Rji , Oji, Tji ],

  Rji:transpose(submatrix(4,Tij,4)),

  Oji:-Rji.submatrix(4,Tij,1,2,3),

  Tji:addcol(Rji,Oji),

  Tji:addrow(Tji,[0,0,0,1])

);
```

```
  T01:rotx(th1);T12:rotx(th2);

  T02:T01.T12;T20:invT(T02);/* point = mult matricielle, non commutative*/

  print(T02);print(T20);
```

Exercice 1 bis :Calcul formel (octave / matlab)

- Ecrire et tester les fonctions : get_rot_x, get_rot_y, get_rot_z,get_rot_u,get_trans() , get_O(T) , getR(T) , [guide de survie : *aide_octave.m*]

```
function T=get_rot_x(t_rad)
  c=cos(t_rad); s=sin(t_rad);
  T=[[ 1, 0, 0,0]
      [ 0, c,-s,0]
      [ 0, s, c,0]
      [ 0, 0, 0,1]];
end
```

```
function Tji=get_InvT(Tij)
  Oij=get_O(1:3,4);
  Rij=Tij(1:3,1:3);
  Rji=Rij'; Oji=-Rji*Oij;
  Tji=[[ Rji,Oji];[0,0,0,1 ] ];
end
```

```
th1 =2; syms th2 ux uy uz; % syms necessite le paquet symbolic
T01=get_rot_x(th1);u=[ux;uy;uz];T12=get_rot_u(u,th2);
T02=T01*T12;T20=get_InvT(T02);
disp(T02);disp(T20);
```

Exercice 2: angles d'Euler(Z-X-Z)

- Les angles d'Euler ϕ, θ, ψ spécifient une rotation , comme suit :
    - Passage du repère 0 au repère 1 par une rotation d'angle ϕ autour de z0
    - Passage du repère 1 au repère 2 par une rotation d'angle θ autour de x1
    - Passage du repère 2 au repère 3 par une rotation d'angle ψ autour de z2
- Ecrire les matrices de transformations homogènes correspondantes (choisir une notation appropriée)
- En déduire l'expression de ${}^0T_3$

  (calcul avec maxima, matlab/octave)

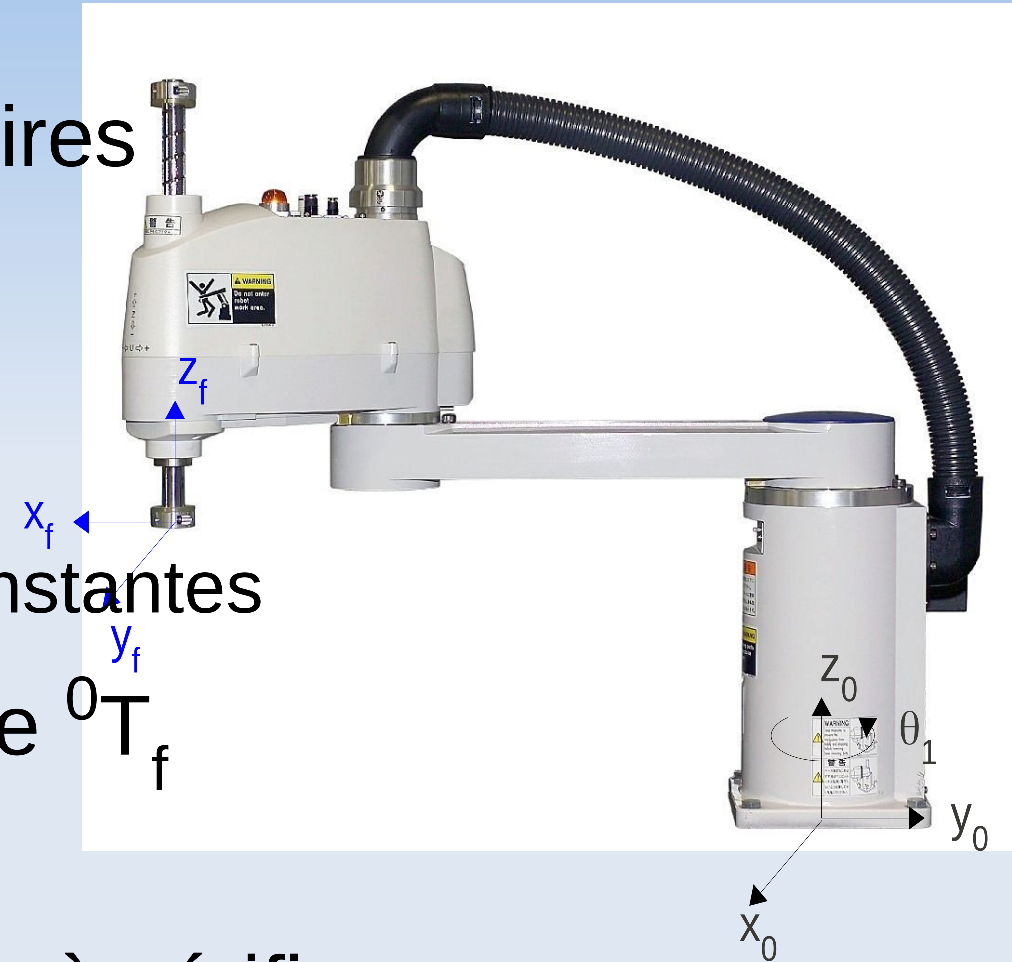
Exercice 3: roulis-tangage-lacet

- Les angles de roulis ϕ, tangage θ, lacet ψ spécifient une rotation , comme suit :
    - Passage du repère 0 au repère 1 par une rotation d'angle ψ autour de x0 (lacet, ou yaw)
    - Passage du repère 1 au repère 2 par une rotation d'angle θ autour de y0 (tangage, ou pitch)
    - Passage du repère 2 au repère 3 par une rotation d'angle ϕ autour de z0 (roulis, ou roll)
- Ecrire les matrices de transformations homogènes correspondantes (choisir une notation appropriée)
- En déduire l'expression de ${}^{0}T_{3}$

  (calcul avec maxima)

Exercice 4 : MGD robot scara

- Écrire l(d)es matrices de transformations élémentaires permettant de passer
  - du repère 0 (world)
  - Au repère *f* (effecteur)
  - Préciser les variables / constantes



- En déduire l'expression de ${}^{0}T_{f}$

  (calcul maxima/octave)

- En déduire les équations à vérifier pour que
  - L'effecteur du robot soit situé sur l'axe x0, à 1m de l'origine du robot, et à une hauteur h=0m