Chapitre 2: Compléments sur les suites numériques

I- Généralités sur les suites récurentes

- **Suite du type** $u_{n+1}=f(u_n)$
  - Méthode:
    - Déterminer le domaine de définition de f
    - Chercher un intervalle $I\in\mathbb{R}$ **stable** par f : $f(I)\subset I$
    - Etudier rapidement les variations de f dans I
      - Si f est **croissante** et $u_0\leq u_1$ alors la suite est croissante
      - Si f est **croissante** et $u_0\geq u_1$ alors la suite est déroissante
      - Si f est **décroissante** alors la suite est alternée de plus les suites $(u_{2n}),(u_{2n+1})$ sont des suites monotones car fof est croissante
      - Cas particulier:
        - Si u_0 est un **point fixe** de f alors la suite est constante
        - Si f est continue et u_n CV alors $f(u_n)\rightarrow f(x)$

II- Exemple de suite récurrentes où on peut expliciter u_n en fonction de n

- **Suites arithmétiques**
  - $u_{n+1}=u_n+r\Rightarrow u_n=u_0+nr$ CV si r=0
- **Suites Géométriques**
  - $u_{n+1}=q.u_n\Rightarrow u_n=q^n.u_0$ Si $|q|<1, CV\rightarrow 0$, Si $q=1\vee u_0=0, cte$, Si $q=-1\wedge u_0\neq 0, DV$, Si $|q|\geq 1\wedge u_0\neq 0, DV$
- **Arithméticogéométriques**
  - $u_{n+1}=a u_n+b$ Faire une étude par point fixe :
    - Définir la fonction f(x)=ax+b Calculer le point fixe : α : f(x)=x
    - Définir la suite $v_n=u_n-\alpha\Leftrightarrow u_n=v_n+\alpha$
    - Montrer que v_n est géométrique
    - Déterminer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n
- **Homograpiques**
  - $u_{n+1}=\dfrac{a.u_n+b}{c.u_n+d}=f(u_n)$
    - Si la suite passe par un point fixe alors elle est constante
      - Si $f(u_0)=u_0$ récurrence $u_n=u_0$ suite constante
      - Si $f(u_n)=u_n$ alors point fixe donc suite constante
    - Si la suite ne passe pas par un point fixe :
      - $f(x)=x\Leftrightarrow\dfrac{ax+b}{cx+d}=x\Leftrightarrow cx^2+(d-a)x-b=0$
        - Si $\Delta>0$ deux racines réelles $l_1\neq l_2$ on pose $v_n=\dfrac{u_n-l_1}{u_n-l_2}$ et on prouve que (v(n)) est géométrique
        - Si $\Delta=0$ une racine double $l=\dfrac{a-d}{2c}$ on pose $v_n=\dfrac{1}{u_n-l}$ et on prouve que (v(n)) est arithmétique avec $r=\dfrac{2c}{c+d}$
        - Attention aux exemples dégénéré, bien faire la partie I
        - Si $\Delta<0$ 2 racines conjuguées $l_1,l_2=\overline{l_1}$ même procédé que si $\Delta>0$ et donc u_n diverge