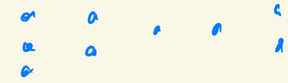
Cover 3/2/21

<u>Th</u> Bouton (cont.)



3 2 1 1 2

$(n_1, \dots, n_p) \in W$ (gagnant pour P_1)

$\iff n_1 \text{ XOR} \dots \text{XOR } n_p \neq 0$

W / L : gagnant / perdant pour le joueur à qui c'est le tour

Caractérisation de W / L (pour jeu fini) :

- toute position de jeu qui n'a aucun successeur est dans L

$p = (0, \dots, 0) \in L$ pour NIM

- $\forall$ position p :

$p \in W$ si il <u>existe</u> p' tq. $p \to p'$ et $p' \in L$

$p \in L$ si <u>pour tout</u> p' tq. $p \to p'$: $p' \in W$

On montre :

$$W = \{ (n_1, \dots, n_p) : n_1 \text{ XOR} \dots \text{ XOR } n_p \neq 0 \}$$

On utilise la caractérisation de

W, L :

1) $p = (0, \dots, 0) \in L$: $0 \text{ XOR} \dots \text{ XOR } 0 = 0$

2) a) $p = (n_1, \dots, n_p) \in L$

On montre : $\forall p \to p'$: $p' \in W$

$p' = (n_1, \dots, m_i, \dots, n_p)$

($p \to p'$: modifie le tas i)

$m_i < n_i$

$K := n_1 \text{ XOR } n_2 \dots \text{ XOR } n_{i-1} \text{ XOR } n_{i+1} \dots \text{ XOR } n_p$

$K \text{ XOR } n_i = 0 \iff K = n_i$

Selon hypothèse : $n_1 \text{ XOR} \dots \text{ XOR } n_p = 0$

$K \text{ XOR } m_i \neq 0$ car

$m_i \neq n_i \Rightarrow p' \in W$

b) $p = (n_1, \dots, n_p) \in W$

On veut trouver $p \to p' \in L$

On sait : $\underbrace{n_1 \text{ XOR} \dots \text{ XOR } n_p}_{a} \neq 0$

Soit r le bit le plus fort de a, différent de 0.

Il doit exister un n_i tq. le bit de n_i à la position r est 1.

n_i XOR a $= m_i < n_i$

1 1 0 0   1 0 1   = 1 0 . . .

a 1 . . . . . . —

n_i 1 . . . . .

    r

XOR   0

Dans p, le joueur joue pour arriver dans $p' = (n_1, \ldots, \underline{m_i}, \ldots n_p)$ (prend $n_i - m_i$ jetons du tas i)

On veut montrer : $p' \in L$

$n_1 \text{ XOR} \ldots n_{i-1} \text{ XOR } \underline{m_i} \text{ XOR } n_{i+1} \ldots n_p$

$= n_1 \text{ XOR} \ldots n_{i-1} \text{ XOR } (a \text{ XOR } n_i) \text{ XOR } n_{i+1} \ldots n_p = a \text{ XOR } a = 0$

$p = (10, 1, 6, 3, 8)$

$1010 \quad 1 \quad 110 \quad 11 \quad 1000$

XOR $\quad a = 110 \neq 0 \rightarrow W$

$r = 2$

$2 \quad 1 \quad 0$

$110 \text{ XOR } a = 110 \text{ XOR } 110 = 0$

$p' = (10, 1, 0, 3, 8) \xrightarrow{\text{XOR}} 0 \quad \in L$

$$p' = (10, 1, 0, 3, 8) \in L$$

$$p'' = (10, 1, 0, 3, 5)$$

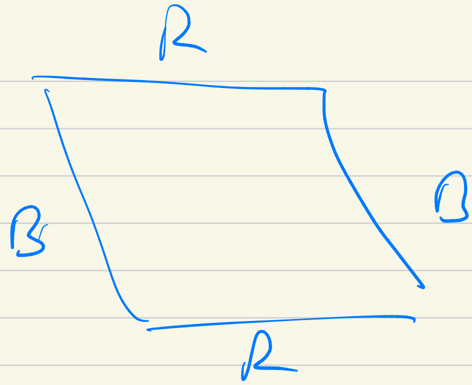
$$
\begin{array}{lrcrcl}
p' & 1010 & \qquad & 1010 & \qquad & n_1 \\
 & 1 & & 1 & & \\
 & 11 & & 11 & & \\
 & 1000 & & 101 & & \\
\hline
 & 0000 & & 1101 & & = a \\
 & L & & W & &
\end{array}
$$

$$n_1 \text{ XOR } a = \underbrace{111}_{m_1} < n_1$$

$$\Rightarrow \quad p''' = (7, 1, 0, 3, 5) \in L$$

$$
\begin{array}{lr}
 & 111 \\
 & 1 \\
 & 11 \\
 & 101 \\
\hline
\text{XOR} & 000
\end{array}
$$

HEX



R et B alternent

R pose jetons rouges

B bleues

R gagne si elle construit une ligne rouge N-S

B gagne si il ... bleue O-E

- Le jeu est fini.
- Il ne peut pas y avoir des parties indécises. (à montrer)

Donc HEX est <u>déterminé</u>.

Ça veut dire : soit R ou B gagne.

Th Le joueur qui commence a une stratégie gagnante.

Supposons que R commence.

On montre par l'absurde que R gagne ("vol de stratégie").

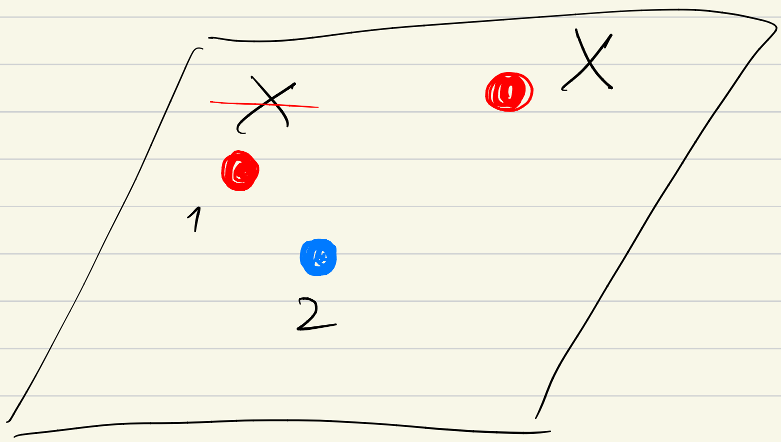
Supposons que B a une stratégie gagnante σ.

On déf. une stratégie σ' pour R.

- R commence par coup arbitraire, qu'on marque par X.
- B joue son premier coup
- A partir d'ici, R joue σ.

Si σ lui dit de jouer à

la place X, alors R choisit arbitrairement une place libre, pose ce jeton, et cette place devient le nouveau X.



$\sigma \longrightarrow 1$

A chaque instant, les jetons de R, sauf X, sont conformes à σ.

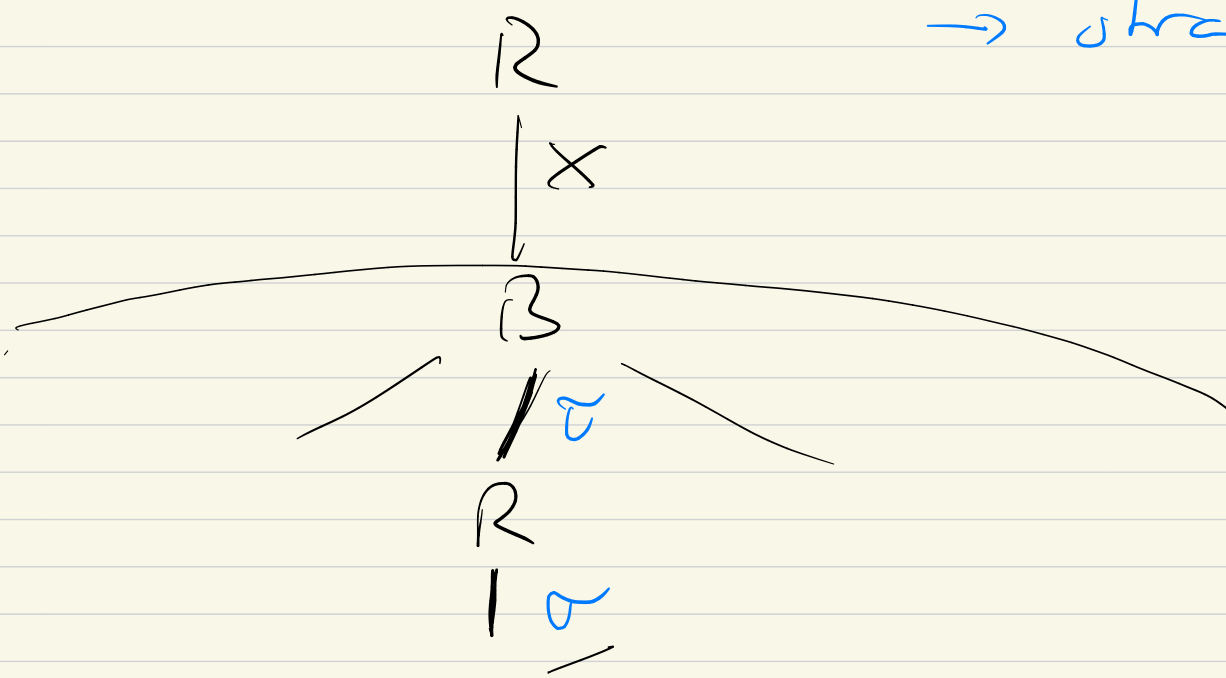
R joue σ "en tant que 2ème joueur".

On montre que σ' est gagnante pour R.

Supposons par l'absurde que σ' n'est pas gagnante pour R.

Ça veut dire qu'il ex. une stratégie gagnante pour B, car le jeu est déterminé.

$\rightarrow$ stratégie τ



R joue en respectant σ (sauf pour x)

x rend le vie de B plus diff.

mais B gagne avec τ !

Si X ne serait pas sur le tablier :

— B gagnerait toujours avec $\tilde{\tau}$

— R joue σ, en tant que 2ème joueur.

$\longrightarrow$ contradiction avec l'hypothèse que σ est stratégie gagnante pour le 2ème joueur.

$\Rightarrow$ σ' est gagnante pour R !

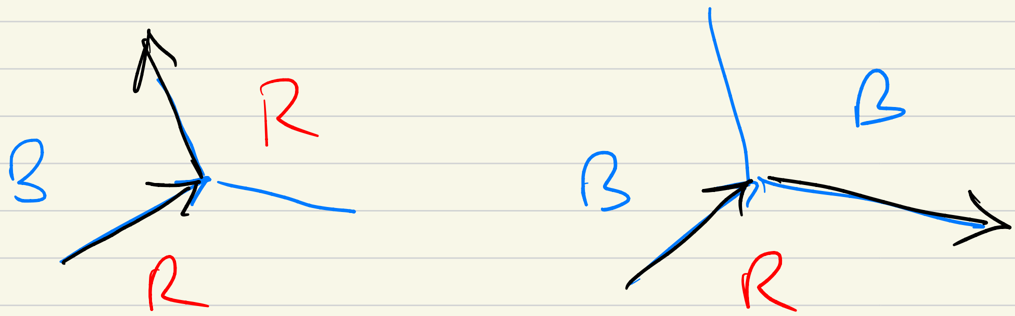
Dans HEX il n'y a pas de partie indécise :

Si le tablier est rempli par jetons, alors soit il ex. un chemin rouge N–S, ou un chemin bleu O–E.

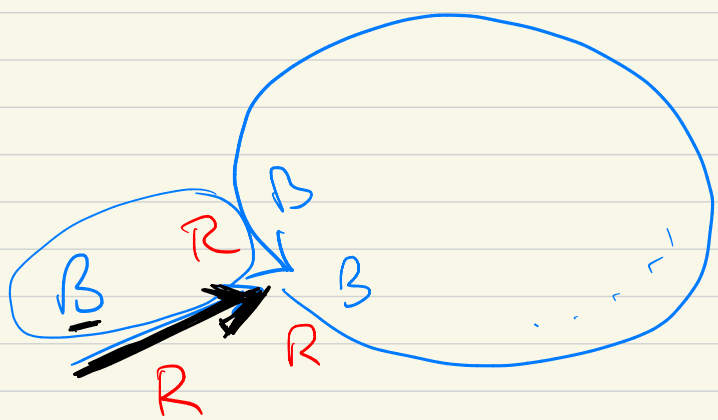
On va construire un tel chemin par l'algorithme suivant :

- on commence dans le coin Sud-Ouest.
- on se balade au long des arêtes des hexagones, en respectant l'invariant

qui dit qu'il faut voir
B à gauche et
R à droite de l'arrete
actuelle



1) Ce chemin ne peut pas contenir une boucle :



2) Ce chemin s'arrêtera soit sur E ou sur N.

↓ B → R gagne