iF 122 5/5/21

Jeux stratégiques / matriciels

- plusieurs joueurs
- jeux concurrents (à la pierre-feuilles-ciseaux)
- gain | pertes, équilibres de Nash
- pas nécessairement à somme nulle
- jeux non-coopératifs

Joueurs $\{1, \dots, n\}$

<u>Def</u> Jeu stratégique $G = (S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n)$

- S_i = ens. fini de stratégies pour joueur i
- p_i : payoff, $p_i : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}$ du joueur i

Les stratégies sont choisies simultanément.

On note $s = (s_1, .., s_n)$

$1 \leq i \leq n$ $\quad s_{-i} = (s_1, .. s_{i-1}, s_{i+1}, .. s_n)$

Les joueurs sont rationnels : ils veulent maximiser leur gain individuel ; ils connaissent les S_i, p_i.

Ex 1) Prisoner's dilemma

$S_1 = S_2 = \{C, D\}$

C : coopérate (parler) $\quad$ D : defect (se taire)

1 \ 2	C	D
C	−2, −2	0, −3
D	−3, 0	−1, −1

eq de Nash

Pareto efficient

$p_1(C, D) = 0$

$p_2(C, D) = -3$

2) Battle of sexes (Bach vs. Stravinsky)

1 \ 2	F	B
F	2, 1	0, 0
B	0, 0	1, 2

1) et 2) : pas somme nulle

3) Matching pennies

	H	T
H	1, −1	−1, 1
T	−1, 1	1, −1

jeu à somme nulle

pas d'éq. de Nash

On essaie d'identifier les meilleures stratégies :

- s_i s'appelle " meilleure réponse " par rapport à une stratégie s_{-i} des autres si

$$\forall s_i' \in S_i : p_i(s_i, s_{-i}) \geq p_i(s_i', s_{-i})$$

- $s = (s_i)_i$ s'appelle <u>équilibre de Nash</u> si chaque s_i est " meilleure réponse " à s_{-i}.

(personne n'a l'intérêt de changer la stratégie de son côté)

- on appelle $s = (s_i)_i$ Pareto efficient

si pour aucune $s' = (s'_i)_i$ on a :

$\forall i \quad p_i(s') \geq p_i(s)$ et

$\exists i \quad p_i(s') > p_i(s)$

Stratégies dominantes

- $s_i, s_i' \in S_i$

s_i domine strictement s_i' si

$\forall s_{-i} \in S_{-i} : p_i(s_i, s_{-i}) > p_i(s_i', s_{-i})$

s_i domine faiblement s_i' si

$\forall s_{-i} \in S_{-i} : \quad p_i(s_i, s_{-i}) \geq p_i(s_i', s_{-i})$

et $\exists s_{-i} \in S_{-i}$:

$$p_i(s_i, s_{-i}) > p_i(s_i', s_{-i})$$

s_i domine s_i' si

$\forall s_{-i} \in S_{-i} : \quad p_i(s_i, s_{-i}) \geq p_i(s_i', s_{-i})$

- s_i s'appelle strictement / faiblement dominante si pour toute $s_i' \neq s_i$: s_i domine strictement / faiblement s_i'

<u>Rq</u> Un joueur rationnel ne va jamais choisir une stratégie qui est strictement dominée.

Prisoners' dilemma :

C ? D

C est strictement dominée par D

→ le choix rationnel est de jouer D.

<u>Rq</u> Supposons que $s = (s_i)$ est tq. chaque s_i est dominante. Alors s est équilibre de Nash.

Car $p_i(s_i, s_{-i}) \geq p_i(s_i', s_{-i})$, $\forall i$

Ex

1 \ 2	L	R
T	1,1	1,1
B	1,1	0,0

T ? B T domine faiblement B, L domine faiblement R

Si on enlève les stratégies faiblement dominées, donc B et R, on obtient (T, L) : équilibre de Nash

Algorithmes pour calculer des équilibres de Nash (s'il y en a)

① Elimination des stratégies dominées strictement (IESDS - iterative elimination of strictly dominated strategies).

$G = (S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n)$

$\rightarrow$ restrictions $\emptyset \neq R_i \subseteq S_i$

$G' = (R_1, \dots, R_n, p_1, \dots, p_n)$ restriction de G

$\boxed{G \to G'}$ si $\forall i$ $R_i \subseteq S_i$ est tq :

$\forall s_i \in S_i \setminus R_i$ $\exists s_i' \in R_i$ tq. s_i est strictement dominée par s_i'

Ex

1 \ 2	L	M	R
T	3,0	2,1	1,0
C	2,1	1,1	1,0
B	0,1	0,1	0,0

G

unique eq. de Nash

B ? T   T dominé str. B

R ? M   M ——— R

On élimine B, R :

	L	M
T	3,0	2,1
C	2,1	1,1

T domine strict. C

On élimine C :

	L	M
T	3,0	2,1

.. On élimine L

$\boxed{\text{iESDS}}$: on élimine les stratégies strict. dominées, tant que c'est possible.

Si à la fin on obtient exactement <u>une</u> stratégie pour chaque joueur, alors on dit que iESDS résout le jeu G.

Le jeu G' obtenu par iESDS à partir de G s'appelle résultat de iESDS sur G.

<u>Th</u> (iESDS)

Soit $G' = (R_1, .., R_n, p_1, .., p_n)$ un résultat de iESDS sur $G = (S_1, .., S_n, p_1, .., p_n)$.

1) Si s est eq. de Nash pour G, alors s est eq. de Nash pour G'.

2) Si G est <u>fini</u> et s est eq. de Nash de G', alors s est eq. de Nash de G.

3) Si G est fini et résolu par IESDS, alors l'unique stratégie restante est l'unique eq. de Nash pour G.

<u>démo</u>

1) Soit s eq. de Nash pour G

Que sait-on sur les s_i ?

s_i ne peut pas être strict. dominée par une autre stratégie s_i' (Nash)

Donc s_i ne sera jamais éliminée.

2) Supposons que $G \to G'$ en éliminant une stratégie s_i', parce que s_i' est strict. dominée par s_i''

Prenons $s = (s_i)_i$ eq. de Nash de G'.

$$p_i(s_i', s_{-i}) \overset{\text{str.d.}}{<} p_i(s_i'', s_{-i}) \overset{\text{Nash de } G'}{\leq} p_i(s_i, s_{-i})$$

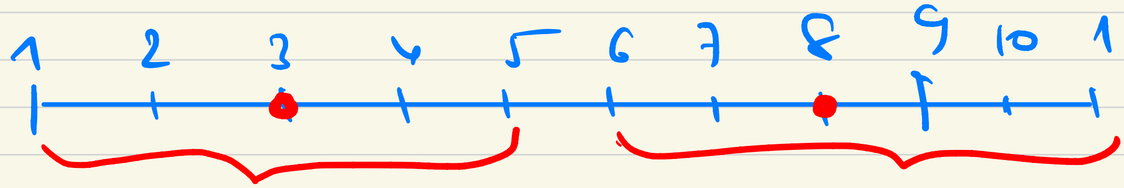
Donc $s = (s_i)_i$ est eq. de Nash de G.

Ex Location game (Hotelling, 1929)

Joueurs : vendeurs qui choisissent une adresse. Les clients vont s'adresser aux vendeurs qui est le plus proche :

Adresses : $i \in \{1, \dots, n\}$

A chaque adresse se trouve exact. 1 client.



$$p(3,8) = (5,6)$$

$$p_1(3,8) = 5 \quad , \quad p_2(3,8) = 6$$

Si un client est à dist. égale des 2 vendeurs → on partage le gain 1/2

$$p_i(s_i, s_{3-i}) = \begin{cases} \dfrac{s_i + s_{3-i} - 1}{2} & s_i < s_{3-i} \\ n - \dfrac{s_i + s_{3-i} - 1}{2} & s_i > s_{3-i} \\ \dfrac{n}{2} & s_i = s_{3-i} \end{cases}$$

$i \in \{1,2\}$

$$p_i(s_i, s_{3-i}) = \begin{cases} \dfrac{s_i + s_{3-i} - 1}{2} & s_i < s_{3-i} \\[2mm] n - \dfrac{s_i + s_{3-i} - 1}{2} & s_i > s_{3-i} \\[2mm] \dfrac{n}{2} & s_i = s_{3-i} \end{cases}$$

$i \in \{1, 2\}$

$s_1 = 1$, $s_2 \in \{1, \dots, n\}$

$$p_1(1, s_2) = \begin{cases} s_2/2 & \text{si } s_2 \neq 1 \\ n/2 & \text{sinon} \end{cases} \qquad p_1(2, s_2) = \begin{cases} (s_2+1)/2 & 2 < s_2 \\ n/2 & 2 = s_2 \\ n-1 & s_2 = 1 \end{cases}$$

$s_1 = 1$ est str. dom. par $s_1' = 2$

$s_1 = n$ —— par $s_1' = n-1$

$n = 2K+1$: le jeu est résolu par IESDS en K rounds, et la stratégie qui survit est $s = (K, K)$. $\to$ unique eq. de Nash du jeu.

Q: Est-ce que l'ordre pour éliminer les strat. strict. dominées est important ?

Non : étant donné un jeu $\boxed{\text{fini}}$, l'algorithme iESDS produit le même résultat, quelque soit l'ordre de l'élimination.

Rq. L'hypothèse $\boxed{\text{fini}}$ est importante, aussi pour les conclusions (2) et (3)

Ex $S_i = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$

$p_i(s) = s_i$

$\forall s_i \;\; \exists s_i' \;\;$ tq. s_i est str. dominée par s_i'

S_i iESDS

– élimine toutes les strat. str. dominées d'un coup $\longrightarrow \emptyset$

- élimine toutes les stratégies strict. dominés sauf $s_i = 0$, $\forall i$

$\rightarrow$ un unique résultat $s = 0$, n'est pas éq. de Nash

- élimine les str. strict. dominées une par une, alors l'algo ne termine pas

$G = (V_0 \dot\cup V_1, E, p : \{0, .., d\})$

jeu de parité

$\pi = v_0, v_1, \ldots$ gagné par $\underline{P_0}$ ssi

$\circledast$ $\max(\alpha : \exists^\infty n : p(v_n) = \alpha)$

est $\underline{\text{pair}}$

G + $F \subseteq V$

$\pi = v_0, v_1, \ldots$ gagné par P_0 ssi

$\circledast$ $\underline{\underline{\text{et}}}$ $\exists n : v_n \in F$

Parity $\wedge$ Reach(F)

$$\underbrace{\overset{7}{v_0} \to \overset{\underline{4}}{v_1}}_{} \to \underset{F}{\overset{3}{v_2}} \to \overset{1}{\ldots} \overset{\underline{4}}{\ldots} \overset{1}{\ldots} \overset{\underline{4}}{—}$$

4

$\pi = v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots$

$\pi[i] = v_i, v_{i+1}, \ldots$

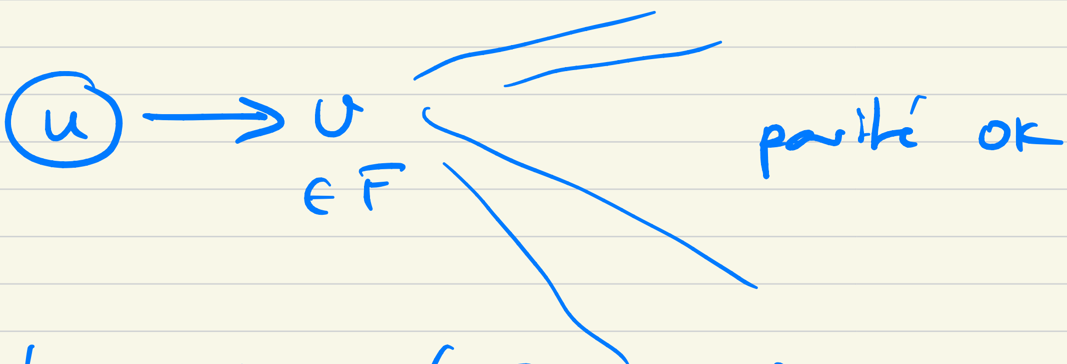
π est gagné par Parity par P_0 $\Leftrightarrow$ $\pi[i]$

1. Idée → on calcule W_0, W_1 pour le jeu parité normal

$F \cap W_0$

= ens. des sommets de F à partir desquels P_0 gagne le jeu de parité

$v \in F \cap W_0$



$W_0' = Attr_0(F \cap W_0)$

$\supseteq$ P_0 gagne en jouant la stratégie d'attracteur vers $F \cap W_0$, puis la strat. de jeu de parité

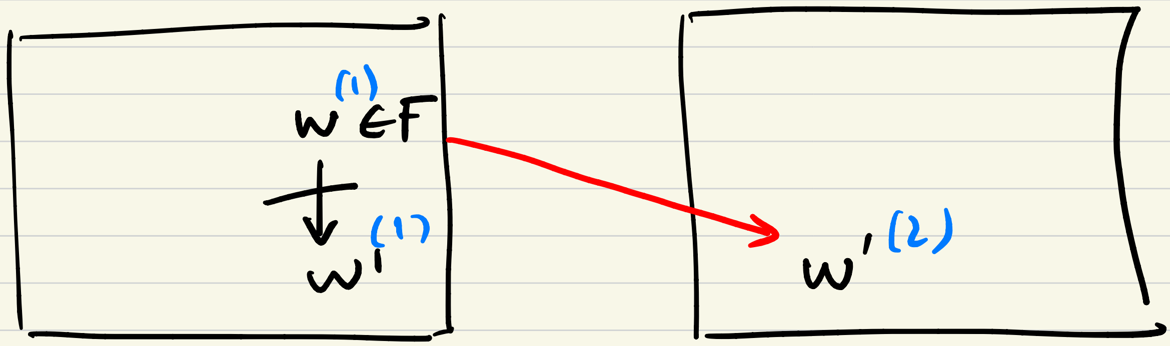
$\subseteq$?

! $v \notin Attr_0(F \cap W_0) \Rightarrow P_1$ gagne

2. Idée.

On construit 2 copies de l'arène de jeu :

G' :



$G^{(1)}$ $= G \setminus$ arêtes issues de F

$G^{(2)} = G$

G' : jeu de parité

$p'(v^{(1)}) = \cancel{0}\ 1$

$p'(v^{(2)}) = p(v)$

$v^{(1)}$ est gagnant dans G' $\Longleftrightarrow$

v ——— dans $\text{Parity} \cap \text{Reach}(F)$