jF 122 19/5/21

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Eq. de Nash

S_i strat. du joueur i
(stratégie pures)

M_i strat. mixtes

$m_i \in M_i \rightarrow$ distr. de proba sur S_i

$|S_i| < \infty \rightarrow m_i$ vecteur $\in [0,1]^{|S_i|}$

Nash : $\forall i,\ p_i(m_i, \underbrace{m_{-i}}_{j \neq i}) \geq p_i(m_i', \underbrace{m_{-i}}_{j \neq i})$

Caractérisation :

m eq. de Nash $\Leftrightarrow$

$\forall i$ $\begin{cases} p_i(m_i, m_{-i}) = p_i(s_i, m_{-i}) \\ \qquad \forall s_i \in [m_i] \quad (m_i(s_i) > 0) \\ p_i(m_i, m_{-i}) \geq p_i(s_i, m_{-i}) \\ \qquad \forall s_i \notin [m_i] \end{cases}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Ex PFC

	P	F	C
P	0,0	-1,1	1,-1
F	1,-1	0,0	-1,1
C	-1,1	1,-1	0,0

$m_1 = \frac{1}{3} P + \frac{1}{3} F + \frac{1}{3} C$

$m_2 = \dots$

$m = (m_1, m_2)$ est éq. de Nash

(*) $p_1(m) = \frac{1}{9}(0 + (-1) + 1 + \dots) = 0$

$[m_1] = \{P, F, C\}$

$p_1(P, m_2) = p_1(m_1, m_2) = 0$

F

C

$p_1(P, m_2) = \frac{1}{3}(0 + 1 + (-1)) = 0$

Pareil pour joueur 2, donc m est éq. de Nash.

Rq Il s'agit de l'unique éq. de Nash pour ce jeu.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Jeux à 2 joueurs à somme nulle

→ relation avec LP (programm. linéaire)

→ Minimax (von Neumann, 1928)
→ Borel

Jeux à 2 joueurs : 2 matrices R, C

R : matrice du joueur "row"

C : → " "column"

Somme nulle : $R + C = 0$

PFC : $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ex

	M	T
E	3, -3	-1, 1
S	-2, 2	1, -1

Supposons que "row" annonce la stratégie (1/2, 1/2) $\left(\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}S\right)$

Que fait "column" ? Il choisit la strat. pure T, qui est opt.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Supposons que "row" joue (x_1, x_2)

$(x_1, x_2 \geq 0 \quad , \quad x_1 + x_2 = 1)$

$p_2(M) = -3x_1 + 2x_2$

	M	T
E	3, -3	-1, 1
S	-2, 2	1, -1

$p_2(T) = x_1 - x_2$

joueur "column" $\rightarrow$

$\max(-3x_1 + 2x_2 , x_1 - x_2)$

gain optimal pour C

gain de R = - gain de C

$\rightsquigarrow$ gain opt. pour R =

$\min(3x_1 - 2x_2 , x_2 - x_1)$

Donc, la strat. opt. de R sera de déterminer (x_1, x_2) tq. elle maximise $\min(3x_1 - 2x_2, x_2 - x_1)$

$\rightarrow$ Pb. d'optimisation

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

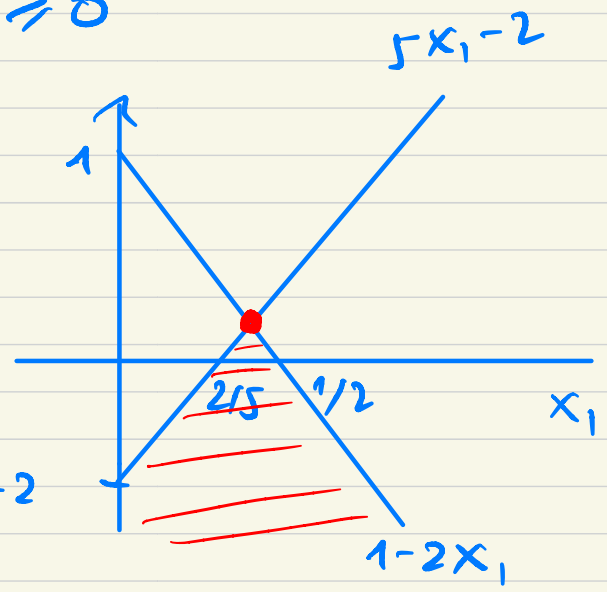
(R) $\max z$ ↙ gain tq.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq z \\ x_2 - x_1 \geq z \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$x_2 = 1 - x_1$

$\Leftrightarrow$ $5x_1 - 2 \geq z$

$1 - 2x_1 \geq z$



$5x_1 - 2 = 1 - 2x_1$

$x_1 = \frac{3}{7}$, $x_2 = \frac{4}{7}$

$z = \frac{1}{7}$ → gain opt. pour R

(C) $\max z'$ tq.

$$\begin{cases} -3y_1 + y_2 \geq z' \\ 2y_1 - y_2 \geq z' \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

.... ⇝ $y_1 = \frac{2}{7}$, $y_2 = \frac{5}{7}$, $z' = -\frac{1}{7}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Jeux sur les graphes :

un jeu est déterminé si $\forall v \in V$

$v \notin W_0 \Leftrightarrow v \in W_1$

$\Rightarrow$ Minimax - Theorem (von Neumann)

$\rightarrow$ Gain max. de R + gain max de C

$= 0$

$\rightarrow$ $\max_x \min_y x^T R y = \min_y \max_x x^T R y$

$x^T R y$?

$= $ espérance de gain de R

$x \hat{=}$ strat. mixtes pour R

$y \hat{=}$ ——·—— C

PL $\quad \max (c^T \cdot x) \quad x \in \mathbb{R}^n$

tq. $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\quad A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

PL primal

$$\max (c^T \cdot x) \quad \text{tq.} \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

PL dual

$$\min (b^T y) \quad \text{tq.} \begin{cases} A^T y \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

$y \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A^T \in \mathbb{R}_{n,m}$

Th. de dualité de LP :

$$\max_x (c^T x) = \min_y (b^T y)$$

(R) LP(1) $\max z$ ← gain max. pour R

tq. $x^T R \geqslant z \cdot 1^T$

$x^T \cdot 1 = 1$

$x \geqslant 0$

$x \in [0,1]^m$

$m+1$

$c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

dual de LP(2) $\min z'$ tq. $-y^T \cdot R^T + z' \cdot 1^T \geqslant 0$

$y^T \cdot 1 = 1$

$y \geqslant 0$

$\max(z) = \min(z')$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

LP(2)

$\min z'$

$-y^T \cdot R^T + z' \cdot 1^T \geq 0$

$y^T \cdot 1 = 1$

$y \geq 0$

$z'' = -z'$ $\qquad$ $C = -R$

LP(3)

$\max z''$

$y^T C^T \geq z'' 1^T$

$(Cy \geq z'' 1)$

$y^T \cdot 1 = 1$

$y \geq 0$

↗ progr. lin. qui décrit le gain optimal de C !

$\max z \overset{\text{LP dual}}{=} \min z' \overset{z' = -z''}{=} -\max z''$

LP(1) $\qquad$ LP(2) $\qquad$ LP(3)

$\Rightarrow$ gain de R + gain (perte) de C = 0

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$LP(1)$: $\max_x \min_y x^T R y$

$LP(3)$: $\max_y \min_x x^T C y$

$(-x^T R y)$

$= -\min_y \max_x x^T R y$

On peut aussi vérifier que ces valeurs représentent un éq. de Nash :

Supposons que

(1) (x, z) optimal pour $LP(1)$,

(3) (y, z'') — " — $LP(3)$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $x^T R \geq z \cdot 1^T \Rightarrow$

$x^T R y \geq z \cdot 1^T y = z$ $(y1 = 1)$

$\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $Cy \geq z'' \cdot 1 \Rightarrow$

$x'^T \cdot Cy \geq z''$ $\forall x'$

$\Rightarrow$ $\underline{x'^T R y \leq -z'' = z}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Rq. On peut calculer en temps polynomial la valeur d'un jeu à 2 joueurs à somme nulle :

$$\max_x \min_y x^T R y = \min_y \max_x x^T R y$$

Parce que le pb. LP peut être résolu en temps polynomial.

Par contre, la complexité des jeux stratégiques que ne sont pas à somme nulle → classe de complexité PPAD.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0