iF 122 19/5/21

Eq. de Nash

S_i strat. du joueur i
(stratégie pures)

M_i strat. mixtes

$m_i \in M_i \to$ distr. de proba sur S_i

$|S_i| < \infty \to m_i$ vecteur $\in [0,1]^{|S_i|}$

Nash : $\forall i,\ p_i(m_i, \underbrace{m_{-i}}_{j \neq i}) \geq p_i(m_i', \underbrace{m_{-i}}_{j \neq i})$

Caractérisation :

m eq. de Nash $\Longleftrightarrow$

$$\forall i \begin{cases} p_i(m_i, m_{-i}) = p_i(s_i, m_{-i}) \quad \forall s_i \in [m_i] \quad (m_i(s_i) > 0) \\ p_i(m_i, m_{-i}) \geq p_i(s_i, m_{-i}) \quad \forall s_i \notin [m_i] \end{cases}$$

Ex PFC

	P	F	C
P	0,0	-1,1	1,-1
F	1,-1	0,0	-1,1
C	-1,1	1,-1	0,0

$$m_1 = \frac{1}{3} P + \frac{1}{3} F + \frac{1}{3} C$$

$$m_2 = \ \dots$$

$m = (m_1, m_2)$ est éq. de Nash

(*) $p_1(m) = \frac{1}{9}\left(0 + (-1) + 1 + \dots\right) = 0$

$[m_1] = \{P, F, C\}$

$$p_1(P, m_2) = p_1(m_1, m_2) = 0$$

F

C

$$p_1(P, m_2) = \frac{1}{3}\left(0 + 1 + (-1)\right) = 0$$

Pareil pour joueur 2, donc m est éq. de Nash.

Rq Il s'agit de l'unique éq. de Nash pour ce jeu.

Jeux à 2 joueurs à somme nulle

→ relation avec LP (programm. linéaire)

→ Minimax (von Neumann, 1928)
→ Borel

Jeux à 2 joueurs : 2 matrices R, C

R: matrice du joueur "row"

C: — — "column"

Somme nulle : $R + C = 0$

PFC : $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

<u>EX</u>

	M	T
E	3, −3	−1, 1
S	−2, 2	1, −1

Supposons que "row" annonce la stratégie $(1/2, 1/2)$ $\left(\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}S\right)$

Que fait "column" ? Il choisit la strat. pure T, qui est opt.

Supposons que "row" joue (x_1, x_2)

$(x_1, x_2 \geq 0 \quad , \quad x_1 + x_2 = 1)$

$p_2(M) = -3x_1 + 2x_2$

	M	T
E	3, −3	−1, 1
S	−2, 2	1, −1

$p_2(T) = x_1 - x_2$

Joueur "column" $\rightarrow$

$\max(-3x_1 + 2x_2 \, , x_1 - x_2)$

gain optimal pour C

gain de R = − gain de C

$\leadsto$ gain opt. pour R =

$\min(3x_1 - 2x_2 \, , x_2 - x_1)$

Donc, la strat. opt. de R sera de déterminer (x_1, x_2) tq. elle <u>maximise</u> $\min(3x_1 - 2x_2 \, , x_2 - x_1)$

$\rightarrow$ pb. d'optimisation

R

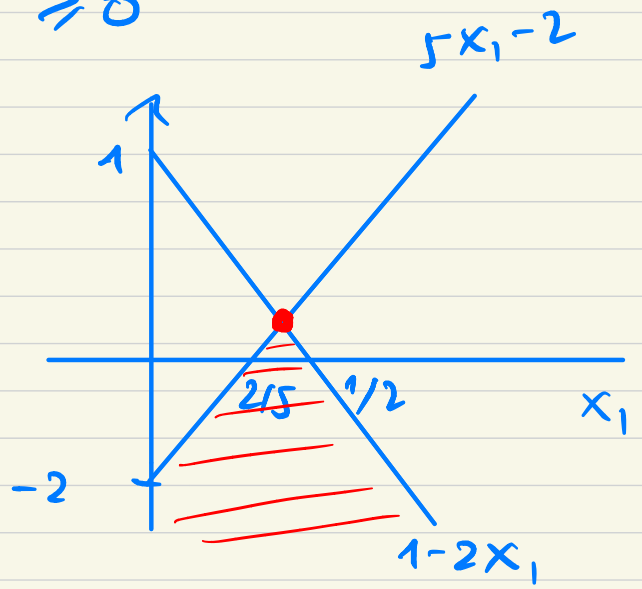
$\max z$ ← gain

tq.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq z \\ x_2 - x_1 \geq z \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$x_2 = 1 - x_1$

$$\Leftrightarrow \quad 5x_1 - 2 \geq z$$
$$1 - 2x_1 \geq z$$



$$5x_1 - 2 = 1 - 2x_1$$

$$x_1 = \frac{3}{7}, \quad x_2 = \frac{4}{7}$$

$$z = \frac{1}{7} \longrightarrow \text{gain opt. pour } R$$

C

$\max z'$

tq.

$$\begin{cases} -3y_1 + y_2 \geq z' \\ 2y_1 - y_2 \geq z' \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\ldots \leadsto \quad y_1 = \frac{2}{7}, \quad y_2 = \frac{5}{7}, \quad z' = -\frac{1}{7}$$

Jeux sur les graphes :

un jeu est <u>déterminé</u> si $\forall v \in V$

$v \notin W_0 \iff v \in W_1$

$\Rightarrow$ <u>Minimax - Theorem</u> (von Neumann)

$\rightarrow$ Gain max. de R + gain max de C = 0

$$\rightarrow \max_x \min_y x^T R y = \min_y \max_x x^T R y$$

$x^T R y$?

= espérance de gain de R

$x \hat{=}$ strat. mixtes pour R

$y \hat{=}$ ——"—— C

PL $\max (c^T \cdot x)$

tq. $\begin{cases} A x \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$

$x \in \mathbb{R}^n$

$A \in \mathbb{R}_{m,n}$

$b \in \mathbb{R}^m$

PL primal

$$\max \left(c^T \cdot x\right) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{tq.} \begin{cases} Ax \leq b & A \in \mathbb{R}_{m,n} \\ x \geq 0 & b \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

PL dual

$$\min \left(b^T y\right) \qquad y \in \mathbb{R}^m$$

$$\text{tq.} \begin{cases} A^T y \geq c & c \in \mathbb{R}^n \\ y \geq 0 & A^T \in \mathbb{R}_{n,m} \end{cases}$$

Th. de dualité de LP :

$$\max_x \left(c^T x\right) = \min_y \left(b^T y\right)$$

R LP(1) $\max z$ ← gain max. pour R

tq.

$$x^T R \geq z \cdot 1^T$$

$$x^T \cdot 1 = 1$$

$$x \geq 0$$

$c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad x \in [0,1]^m$ $\qquad m+1$

---

dual de LP(2) $\min z'$

tq.

$$-y^T \cdot R^T + z' \cdot 1^T \geq 0$$

$$y^T \cdot 1 = 1$$

$$y \geq 0$$

$$\max(z) = \min(z')$$

LP(2) $\qquad \min z'$

$$-y^T \cdot R^T + z' \cdot 1^T \geq 0$$

$$y^T \cdot 1 = 1$$

$$y \geq 0$$

$z'' = -z' \qquad\qquad C = -R$

LP(3) $\qquad \max z''$

$$y^T C^T \geq z'' 1^T$$

$$(C y \geq z'' 1)$$

$$y^T \cdot 1 = 1$$

$$y \geq 0$$

progr. lin. qui décrit le gain optimal de C !

$$\underset{LP(1)}{\max z} \overset{\text{LP dual}}{=} \underset{LP(2)}{\min z'} \overset{z' = -z''}{=} -\underset{LP(3)}{\max z''}$$

$\Rightarrow$ gain de R + $\underset{(\text{perte})}{\text{gain}}$ de C $= 0$

LP(1) : $\max_x \min_y x^T R y$

LP(3) : $\max_y \min_x x^T C y$
$(-x^T R y)$

$= - \min_y \max_x x^T R y$

On peut aussi vérifier que ces valeurs représentent un éq. de Nash :

Supposons que

(1) (x, z) optimal pour LP(1),

(3) (y, z'') — — LP(3)

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad x^T R \geq z \cdot 1^T \Rightarrow$

$x^T R y \geq z \cdot 1^T y = z \quad (y 1 = 1)$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \quad C y \geq z'' \cdot 1 \Rightarrow$

$x'^T \cdot C y \geq z'' \qquad \forall x'$

$\Rightarrow \quad \underline{x'^T R y} \leq -z'' = \underline{\underline{z}}$

Rq. On peut calculer en temps polynomial la valeur d'un jeu à 2 joueurs à somme nulle :

$$\max_x \min_y x^T R y = \min_y \max_x x^T R y$$

Parce que le pb. LP peut être résolu en temps polynomial.

Par contre, la complexité des jeux stratégiques qui ne sont pas à somme nulle $\rightarrow$ classe de complexité PPAD.