IF 12/5/21

S_{-i} : $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots s_n)$

Algorithme <u>IEWDS</u> (iter. elim. of weakly dom. strategies) :

on élimine les stratégies faiblement dominées

<u>ex</u> Matching Pennies* (MP : pas de Nash)

	H	T	E
H	1,−1	−1, 1	−1,−1
T	−1,1	1,−1	−1,−1
E	−1,−1	−1,−1	−1,−1

Nash

E vs. H, T ?

H, T domine faiblement E (pas strict.)

IEWDS élimine les stratégies E

→ il élimine le seul éq. de Nash ☹

Th [IEWDS]

Soit G jeu fini.

(i) Si $G \xrightarrow{*} G'$ et s est éq. de Nash de G', alors s est éq. de Nash de G.

(ii) Si $G \xrightarrow{*} G'$ et G' a une unique stratégie pour chaque joueur, alors cette stratégie $s = (s_i)_i$ est un éq. de Nash pour G (pas nécessairement unique).

Ex

	L	M	R
T	0,1	1,0	0,0
B	0,0	0,0	1,0

Comparer L, M, R ?

L domine faibl. M, R

1) Eliminer M, R :

	L
T	0,1
B	0,0

$\rightarrow$ 2 éq.

2) Éliminer R :

	L	M
T	0,1	1,0
B	0,0	0,0

Comparer B, T ?
T domine f. B

→ éliminer B :

	L	M
T	0,<u>1</u>	1,<u>0</u>

L domine f. M
→ éliminer M → (T, L)
unique réponse

iEWDS :
- le résultat dépend de l'ordre d'élimination
- on peut perdre des éq. de Nash
- il se peut qu'on n'a pas un résultat unique à la fin.

Ex (IEWDS)

Beauty contest game (Moulin 1986)

$n > 2$ joueurs

chaque joueur choisit nb. $\in \{1, \dots, 100\}$

$\rightarrow \quad S_i = \{1, \dots, 100\}$

paiement $p_i =$

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i \text{ n'est pas parmi les valeurs les plus proches de } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n}(s_1 + \dots + s_n) \\ \frac{1}{K} & \text{sinon, où } K = \text{nb. des } s_j \text{ les plus proches de } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n}(s_1 + \dots + s_n) \end{cases}$$

$n = 3 \qquad s_1 = 29, \; s_2 = 32, \; s_3 = 29$

$$\frac{1}{3}(29 + 32 + 29) = 30$$

$$\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$$

$\rightarrow p_1 = p_3 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = 0$

On montre que l'EWSDS résout ce jeu, et qu'il finit avec la stratégie $(1, 1, \dots, 1)$

Thm $\Rightarrow$ $(1, 1, \dots, 1)$ est éq. de Nash

Montrer : $s_1 > 1$ est dominée faibl. par $s_1' = 1$

$$p_1(s_1, \overline{1}) < p_1(1, \overline{1})$$

$$p_1(s_1, s_{-i}) \leq p_1(1, s_{-i})$$

Quelles strat. sont surement éliminables?

Quand les joueurs choisissent entre 1 et 100, la moyenne avg :

$$1 \leq avg \leq 100$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{2}{3} avg \leq \frac{200}{3}$$

$\rightsquigarrow$ si le joueur i propose $s_i > \frac{200}{3}$ $\longrightarrow$ paiement sera 0

Donc, iEWSDS peut éliminer toutes les stratégies $s_i > \frac{200}{3}$.

Après : $1 \leq \text{avg}' \leq \frac{200}{3}$

$$1 \leq \frac{2}{3} \cdot \text{avg}' \leq \frac{400}{9}$$

De façon similaire, iEWSDS peut éliminer toutes les stratégies $s_i > \frac{400}{9}$.

Etc $100 > \frac{200}{3} > \frac{400}{9} > \dots \to 1$

À la fin on reste seulement avec $(1, 1, \dots 1)$.

Jusqu'à maintenant on a déf. les éq. de Nash avec stratégies pures ($s_i \in S_i$).

Pierre - feuille - ciseaux → choix prob. de strat!

$A \neq \emptyset$ fini

Une distrib. de prob. sur A :

$$pr : A \to [0,1]$$

$$\sum_{a \in A} pr(a) = 1$$

On note par ΔA = ens. des distrib. de prob. sur A

— Jeux stratégique

$$(S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n)$$

Une strat. <u>mixte</u> pour le joueur i

= distrib. de prob. sur S_i

ΔS_i = ens. des stratégies mixtes pour i

$m_i \in \Delta S_i$

$$\text{support}(m_i) = \{ s \in S_i : m_i(s) > 0 \}$$

$m \in \Delta S_1 \times \dots \times \Delta S_n$ $\longrightarrow$

$m = (m_1, \dots, m_n)$ $\qquad m_{-i} = (m_1, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_n)$

$s = (s_i)_i$

$$m(s) := m_1(s_1) \cdot m_2(s_2) \cdots m_n(s_n)$$

$$p_i(m) = \sum_{s \in S} m(s) \cdot \underline{p_i(s)}$$

matrice

<u>ex</u> Matching pennies

	H	T
H	1, −1	−1, 1
T	−1, 1	1, −1

$$m_1 = \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} T = m_2$$

$$p_1(m) = 1 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0 = p_2(m)$$

<u>Rq.</u> m est éq. de Nash

Def m est <u>éq. de Nash</u> si pour tout i, et pour toute strat. mixte m_i' : $p_i(m) \geq p_i(m_i', m_{-i})$

<u>lemme</u> Pour tout jeu strat. $(S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n)$, les assertions suivantes sont équiv.

(1) m est éq. de Nash

(2) Pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $s_i \in S_i$:

$$p_i(m) \geq p_i(s_i, m_{-i})$$

(3) Pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $s_i \in S_i \cap \text{support}(m)$:

$$p_i(m) = p_i(s_i, m_{-i}),$$

et pour tout $1 \leq n \leq n$ et tout $s_i \in S_i \setminus \text{support}(m)$:

$$p_i(m) \geq p_i(s_i, m_{-i})$$

<u>démo</u> $(1) \to (2) \to (3) \to (1)$

Ex Battle of sexes

	F	B
F	2,1	0,0
B	0,0	1,2

: possible aussi un éq. de Nash en strat. mixtes

$$m_1 = r_1 \cdot F + (1-r_1) \cdot B$$
$$m_2 = r_2 \cdot F + (1-r_2) \cdot B$$

$\underline{0 < r_1, r_2 < 1}$

$$p_1(m) = 2 \cdot r_1 \cdot r_2 + (1-r_1) \cdot (1-r_2)$$
$$p_2(m) = r_1 \cdot r_2 + 2(1-r_1) \cdot (1-r_2)$$

Si m éq. de Nash :

③ $\text{support}(m_1) = \{F, B\}$

$$p_1(m) = \underbrace{p_1(F, m_2)}_{\substack{= 2r_2 \\ (r_1=1)}} = \underbrace{p_1(B, m_2)}_{\substack{= 1-r_2 \\ (r_1=0)}}$$

$$\Rightarrow 2r_2 = 1-r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{1}{3}$$

$$p_2(m) = \underbrace{p_2(m_1, F)}_{= r_1} = \underbrace{p_2(m_1, B)}_{= 2(1-r_1)}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{2}{3}$$

Th. de Nash (~ 1950)

Tout jeu stratégique possède au moins un éq. de Nash avec strat. mixtes.

Rq Il y a des jeux qui n'ont pas de éq. de Nash en strat. pures (ex. MP, PFC, ...).

La démo. se base sur un thm. de Kakutani (1941) :

[Kakutani] Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est non-vide, compact et convexe, et si :

$$\phi : A \to \mathcal{P}(A) \quad (\text{ens. des } X \subseteq A)$$

tq 1) $\phi(a) \neq \emptyset$ et convexe pour chaque $a \in A$

2) $\{(a, y) : y \in \phi(a)\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ est un ens. fermé

Alors il ex. $a^* \in A$ tq. $a^* \in \phi(a^*)$.

$$A = \Delta S_1 \times \cdots \times \Delta S_n$$

$$m_i \in \Delta S_i \longrightarrow [0,1]$$

n du th. Kakutani $\quad \sum_{i=1}^{n} |S_i|$

$$|S_i| \quad \begin{array}{r|c|} 1\{ & \Sigma = 1 \\ \hline 2\{ & \Sigma = 1 \\ \hline & \vdots \\ \hline n\{ & \Sigma = 1 \end{array}$$

$$\mathrm{best}_i : \prod_{j \neq i} \Delta S_j \longrightarrow \mathcal{P}(\Delta S_i)$$

$\mathrm{best}_i(m_{-i}) = \{ m_i \in \Delta S_i : m_i$ est meilleure réponse à $m_{-i} \}$

$$\phi = \mathrm{best} : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$\mathrm{best}(m) := \mathrm{best}_1(m_{-1}) \times \cdots \times \mathrm{best}_n(m_{-n})$$

m est éq. de Nash $\iff$

$$m \in \mathrm{best}(m)$$

$\mathrm{best}_i(m_{-i}) \neq \emptyset$: best_i fct. continue et bornée

Parity $\wedge$ Reach(F) $\longrightarrow$ W_0', W_1'

- On calcule W_0, W_1 : les régions gagnantes du jeu de parité
- $W_0' := \mathrm{Attr}_0(F \cap W_0)$

$\supseteq$: P_0 joue strat. d'attracteur jusqu'à ce que la partie arrive dans $F \cap W_0$; ensuite elle joue la strat. gagnante sur W_0

$\subseteq$ On montre que

$\overline{\mathrm{Attr}_0(F \cap W_0)} \subseteq W_1'$

P_1 joue la strat de piège $\rightarrow$ celle qui évite $F \cap W_0$

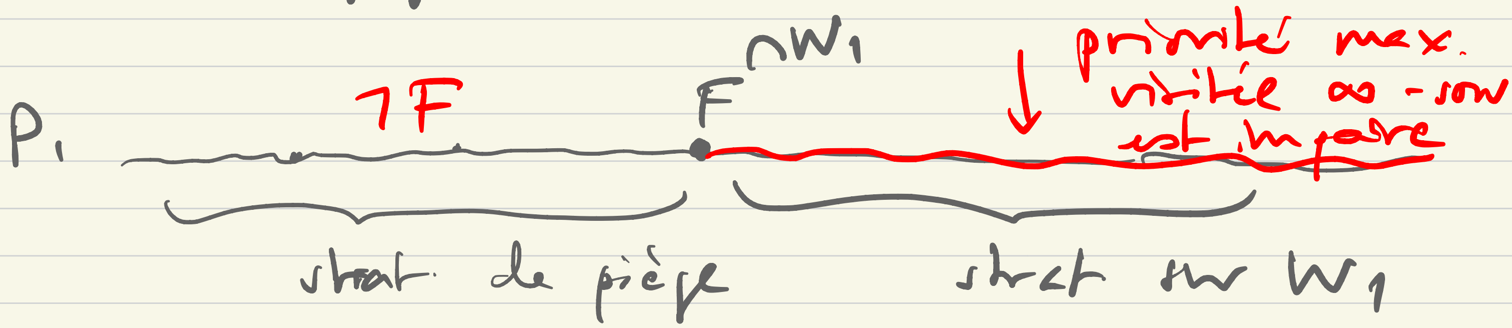
- Si F n'est jamais visité : la partie est gagnée par P_1.

Dès que la partie arrive dans F :

$$v \in F \setminus W_0 \Rightarrow v \in F \cap W_1$$

↑ Parité : déterminés

⤳ P_1 commence à jouer la strat. gagnante sur W_1



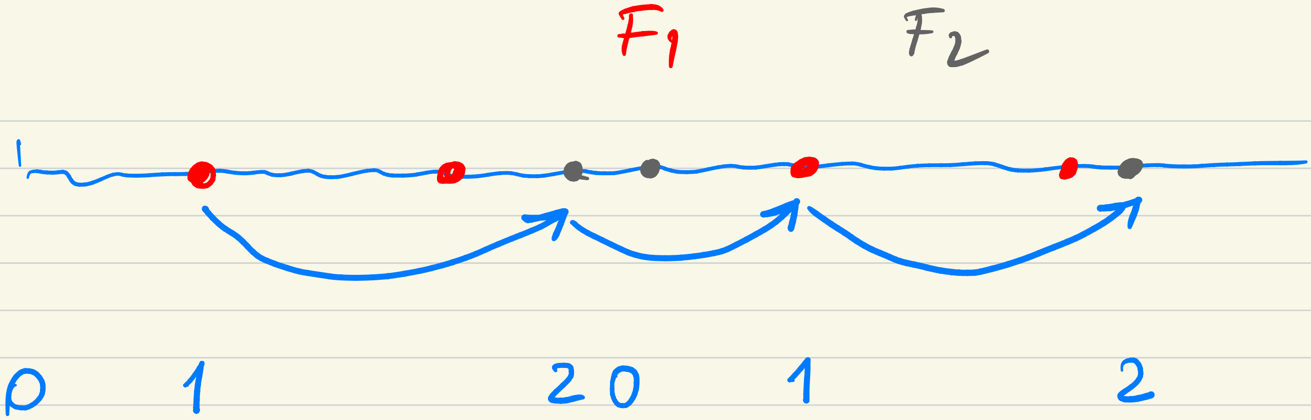
$\Rightarrow$ cette partie est gagnante pour P_1 (elle visite F, mais la prio max. vue ∞-souvent est impaire)

$F_1, F_2 \subseteq V$ $\qquad\qquad$ $F_1 \cap F_2 = \emptyset$

P_0 gagne avec $\quad$ $\text{Büchi}(F_1) \wedge \text{Büchi}(F_2)$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right] & 2 \arrow[l, bend right] \arrow[r, bend left] & 3 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$F_1 = \{1\}$
$F_2 = \{3\}$



∞-souvent F_1 $\wedge$ ∞-souvent F_2

$\hat{=}$ ∞-souvent 2