ELECTROCINETIQUE II

Classes préparatoires et 1er cycle
de l' Enseignement Supérieur

M. AICHE
e-mail: mourad.aiche@u-bordeaux.fr

Documents téléchargeables à l'adresse url :

ftp://www.cenbg.in2p3.fr/hshd/CPBx/Semestre_2
ou
ftp://ftp.cenbg.in2p3.fr/hshd/CPBx/Semestre_2

1

3 - CIRCUITS ELECTRIQUES EN REGIME TRANSITOIRE

2

3.1- Introduction générale

a) Excitation et réponse d'un circuit

Considérons un circuit électrique auquel on applique des sources de tension et de courant à un instant que l'on peut prendre comme origine des temps (t=0). Ces sources constituent l'excitation.
Les tensions et les courants induits dans les branches du circuit, constituent la réponse du circuit.

Excitation (Source de tension et de courant) → Circuit électrique → réponse (tensions et courants dans le circuit)

Sans excitation, le circuit est dit au repos.

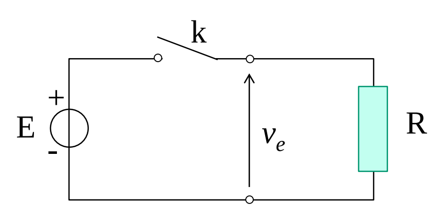
Il existe 2 types d'excitations :

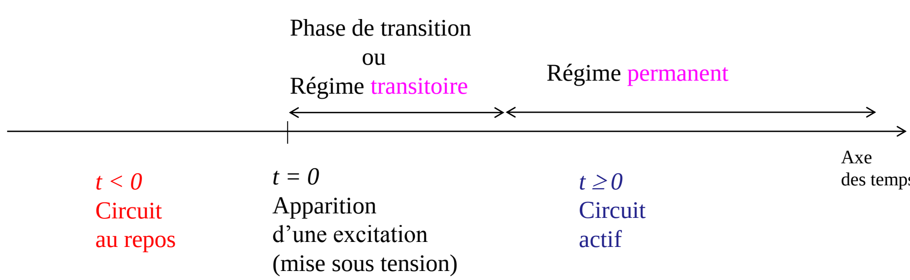
Un circuit est dit en régime continu, si l'excitation est indépendante du temps.
Ex: Tous les circuits étudiés au premier semestre, étaient en régime continu.

Un circuit est dit en régime variable, si l'excitation est dépendante ou varie au cours du temps.
Ex: prise de courant EDF (en salle de TP, à domicile)

3

b) Etablissement d'une excitation dans un circuit





La réponse d'un circuit électrique, suite à l'application d'une excitation, comprend généralement un régime transitoire et un régime permanent.

Durant le régime transitoire, les tensions et les courants évoluent avec le temps. Ce régime ne dure qu'un temps limité.

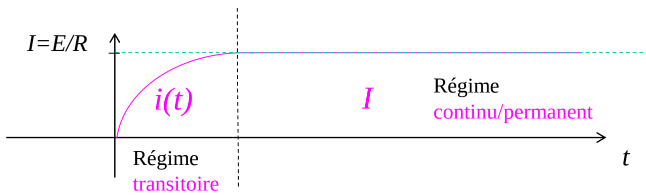
4

Lorsque le régime permanent est établi, les tensions et les courants dans le circuit n'évoluent plus au cours du temps et demeurent inchangés.

L'analyse du régime permanent consiste à déterminer la réponse d'un circuit électrique après que le régime transitoire soit terminé.

Récapitulatif

Excitation	Régime	Etude du circuit
Continue	Transitoire	Régime continu transitoire (régime transitoire)
	Permanent	Régime continu permanent (régime continu)
Variable	Transitoire	Régime variable transitoire
	Permanent	Régime variable permanent

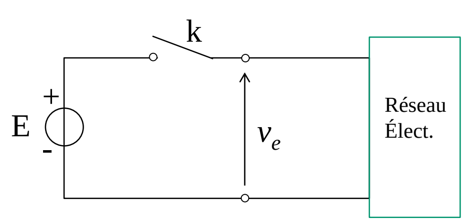


Notation

Les grandeurs électriques qui ne varient pas au court du temps sont par convention notées en lettres MAJUSCULES (E, U, I etc …)

Les grandeurs électriques qui varient au court du temps sont par convention notées en lettres minuscules *(e, u, i ou bien e(t), i(t), u(t) etc …)*

c) Modélisation d'une mise sous tension d'un réseau électrique



On ferme l'interrupteur k à t=0 :

$$\begin{cases} v_e(t) = 0 & \textit{pour} \quad t < 0 \\ v_e(t) = E & \textit{pour} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$V_e(t)$ est appelée tension échelon.

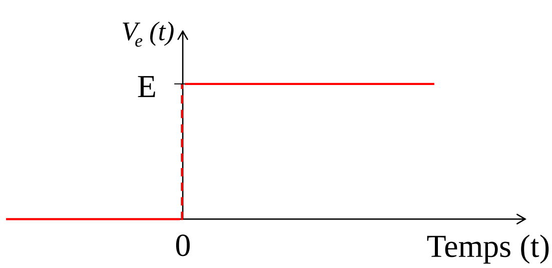
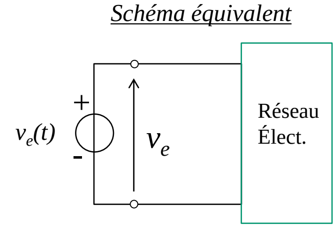


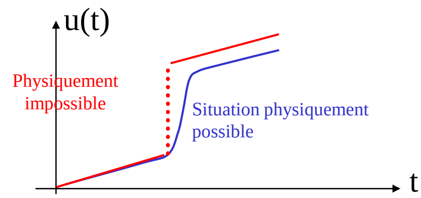
Schéma équivalent

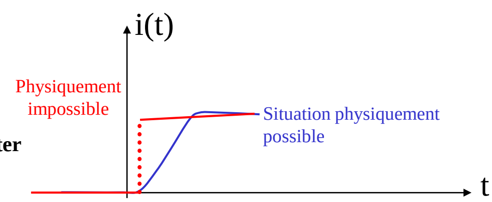


d) Evolution continue des tensions et courants dans le réseau électrique

Les tensions est les courants réels ne peuvent présenter de discontinuité à l'instant correspondant à la fermeture de l'interrupteur k.

Une tension u(t) ne peut jamais présenter de discontinuité.



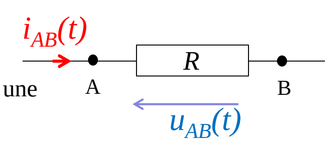


Un courant i(t) ne peut jamais présenter de discontinuité.

3.2- Régime transitoire dans des circuits du 1er ordre.

3.2.1- Résistor

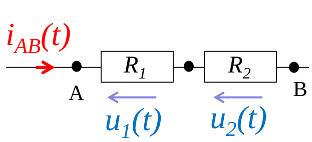
Soit un résistor de résistance R parcourue par un courant variable $i_{AB}(t)$. *Il apparait à ces bornes A et B* une différence de potentiel (ddp) $u_{AB}(t)$.



On admet qu'à chaque instant t, la loi d'Ohm est vérifiée :

$$\boxed{u_{AB}(t) = R\ i_{AB}(t)}$$

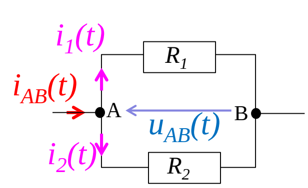
Montage en série



$u_{AB}(t) = u_1(t) + u_2(t)$

$u_{AB}(t) = (R_1 + R_2)\ i_{AB}(t)$

Montage en dérivation



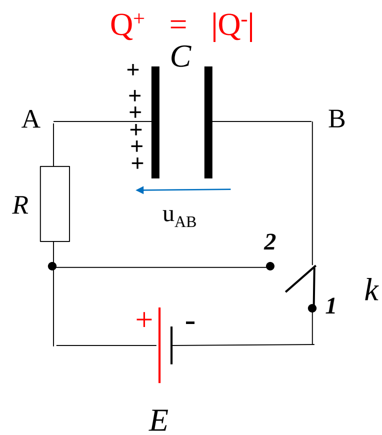
$i_{AB}(t) = i_1(t) + i_2(t)$

3.2- Régime transitoire dans des circuits du 1er ordre.

3.2.2- Condensateurs et dipôle (RC).

Un condensateur est l'ensemble formé par deux électrodes métalliques planes A et B séparées par un milieu isolant (aussi appelé diélectrique).

Condensateur en situation de charge. Interrupteur en position 1



On admet la relation :
$Q^+ = |Q^-| = C \cdot U_{AB} = C \cdot E$

Au cours du temps on a:

$$q(t) = C \cdot u_{AB}(t)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_{AB}(t)}{dt}$$

9

En résumé :

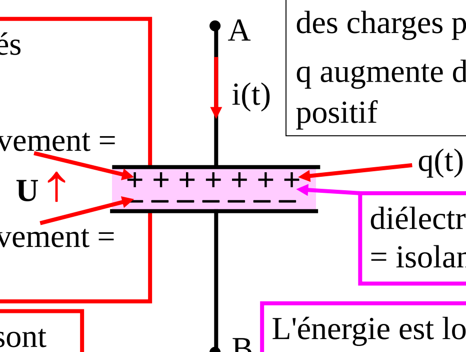
Les électrons sont chargés négativement.

électrode chargée positivement = manque d'électrons.

électrode chargée négativement = excès d'électrons.

dans ce cas i apporte des charges positives

q augmente dq/dt est positif



diélectrique = isolant

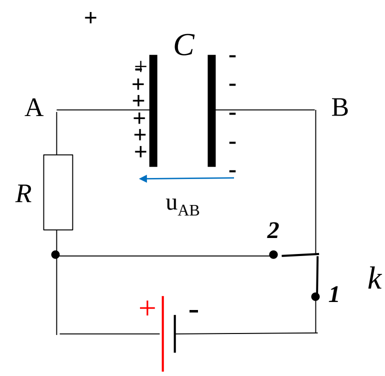
Les charges électriques sont localisées **à la surface** des conducteurs

L'énergie est localisée **dans** le diélectrique

Orientation du courant = sens de déplacement des charges **positives**

10

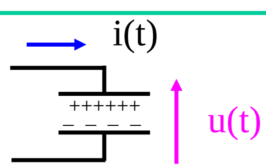
Condensateur en situation de décharge. Interrupteur en position 2



Le condensateur joue le rôle d'un générateur

11

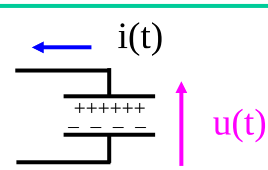
Condensateurs: Orientation et signes



Charge du condensateur: Convention récepteur

$$i = +\frac{dq}{dt}$$

$$i(t) = +C\frac{du(t)}{dt}$$



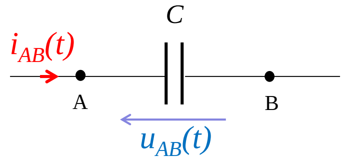
Décharge du condensateur: Convention générateur

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

$$i(t) = -C\frac{du(t)}{dt}$$

12

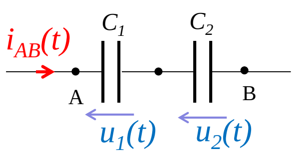
Symbole électrique



Convention de signe dipôle passif ou récepteur

$$\boxed{i_{AB}(t) = C\frac{d}{dt}u_{AB}(t)}$$

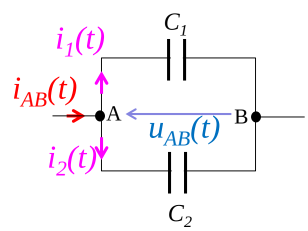
Montage en série/ équivalence



$u_{AB}(t) = u_1(t) + u_2(t)$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Montage en dérivation



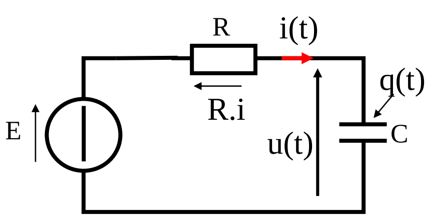
$i_{AB}(t) = i_1(t) + i_2(t)$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

13

Le dipôle RC: Charge du condensateur

Alimentation du circuit par un échelon de tension



à l'instant $t=0$ le condensateur est déchargé $u(0)=0$, et $q(0)=0$. on ferme l'interrupteur k et le courant commence à passer.

Analyse du circuit:
Le circuit ne comporte qu'une seule maille.

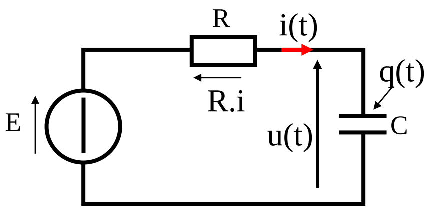
$$E - R.i - u(t) = 0$$

Dans ce cas le condensateur est le récepteur, (charge du condensateur).

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{dq}{dt}$$

14

Le dipôle RC: Charge du condensateur



Mise en équation:

E = R.i(t) + u(t).

$$E = R.i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

Nous avons trois variables: u(t), i(t), q(t) On exprime tout en fonction de l'une (au choix) de ces variables.

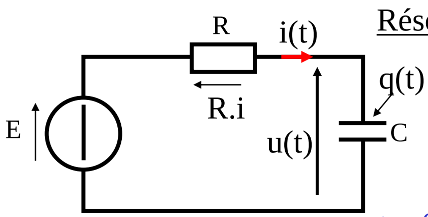
On dérive par rapport à t et on tient compte de $i = \frac{dq}{dt}$

l'équation devient: $R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

on écrit cette **équation différentielle** sous la forme: $\frac{di}{dt} = -\frac{i}{RC}$

15

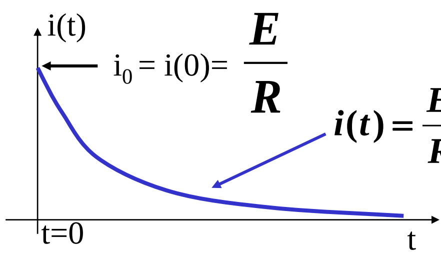
Le dipôle RC: Charge du condensateur



Résolution de cette équation différentielle:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{RC} \qquad \frac{di}{i} = -\frac{dt}{RC}$$

$t = 0 \Rightarrow i(0) = i_0$ $\quad \ln(i) = -\frac{t}{RC} + \ln(i_0)$



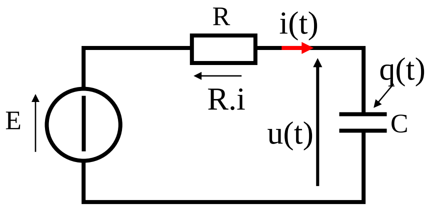
$i_0 = i(0) = \dfrac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}}$

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}$$

C'est donc bien un courant **transitoire**, qui tend rapidement vers zéro après la fermeture du circuit.

16

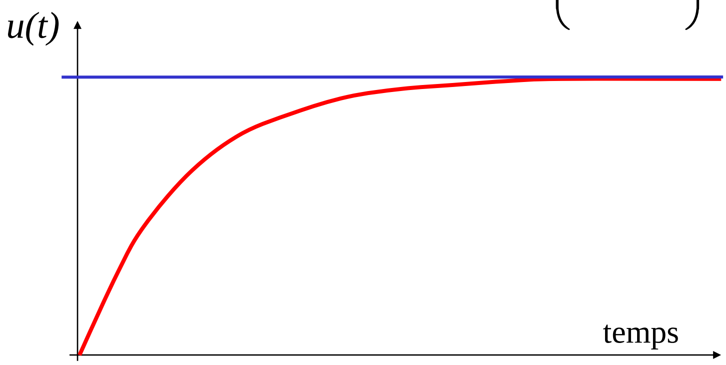
Le dipôle RC: Charge du condensateur



La tension

u(t) = E - R.i

$$u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



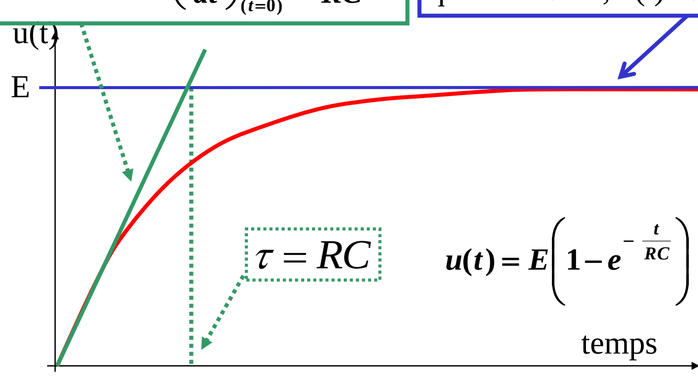
17

Le dipôle RC: Charge du condensateur

Etude de la fonction

pente à l'origine: $\left(\frac{du}{dt}\right)_{(t=0)} = \frac{E}{RC}$

Asymptote:
quand t $\rightarrow \infty$, u(t) $\rightarrow$ E



$$u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

18

Unités: τ en seconde, R en ohm et C en farad

Le dipôle RC: Aspect énergétique

Comment évolue l'énergie au cours d'un régime transitoire de charge de condensateur ?

Puissance p(t) = $u(t).i(t)$, Energie dW = $u(t).i.dt$

$q(t) = C\,u(t)$, ce qui donne $dq=Cdu$ et d'autre part, $dq=i.dt$.

énergie fournie par le générateur

$$\int_0^{\infty} E\,i(t)\,dt = E\int_0^{Q} \frac{dq}{dt}\,dt = E\int_0^{Q} dq = EQ = CE^2$$

énergie stockée par le condensateur

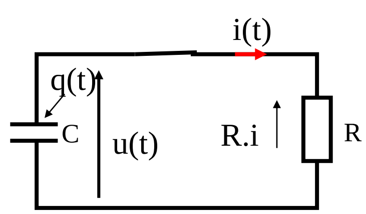
$$\int_0^{\infty} u.i.dt = \int_0^{Q} u\,dq = \int_0^{U} C\,u.du = \frac{1}{2}CU^2$$

énergie perdue par effet Joule dans la résistance

$$\int_0^{\infty} R.i^2.dt = \int u\,i.dt = \int u.dq = C\int u.du = \frac{1}{2}CU^2$$

19

Le dipôle RC: Décharge du condensateur



à l'instant t=0 le condensateur est chargé $u(0)\neq 0$, il porte la charge $q(0)=C.u(0)$ on ferme l'interrupteur k et le courant commence à passer.

Analyse du circuit:

Le circuit ne comporte qu'une seule boucle maille.

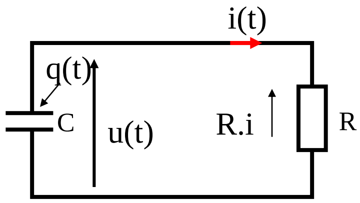
$$u(t) = R.i.$$

Dans ce cas le condensateur est le générateur, (décharge du condensateur).

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad i(t) = -\frac{dq}{dt}$$

20

Le dipôle RC: Décharge du condensateur



<u>Mise en équation</u>:

u(t) = Ri(t)

$$\frac{q(t)}{C} = R.i(t)$$

Cette fois choisissons u(t).

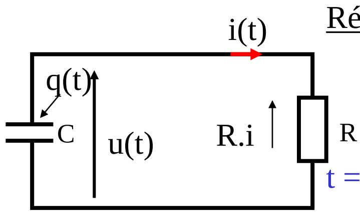
$$i(t) = -\frac{dq}{dt} \qquad u(t) = -R\frac{dq}{dt} = -RC\frac{du}{dt}$$

On écrit cette équation sous la forme: $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{u}{RC}$

Bien remarquer que nous pouvons tout aussi bien choisir d'orienter i dans le sens inverse. Cela revient à changer l'orientation de i : changer i en -i donc u(t)=-R.i(t) et i=+dq/dt . On obtient donc le même résultat.

21

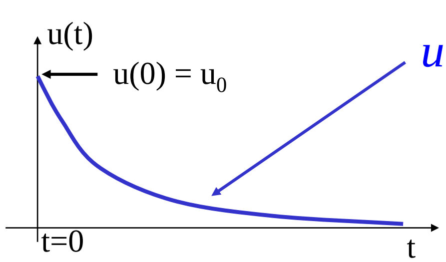
Le dipôle RC: Décharge du condensateur



<u>Résolution de cette équation différentielle</u>:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC} \qquad \frac{du}{u} = -\frac{dt}{RC}$$

t = 0 $\Rightarrow$ u(0) = u_0 $\quad \ln(u) = -\dfrac{t}{RC} + \ln(u_0)$



$$u(t) = u_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

22

3.2.3- Inductances et dipôle (RL).

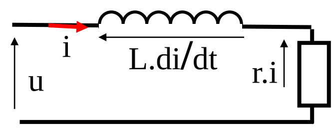
Une bobine est constitué par l'enroulement d'une grande longueur de fil conducteur .

Un noyau de matériau magnétique est parfois placé à l'intérieur.

Considérons une bobine d'inductance L orientée en convention récepteur.
Une bobine réelle présente toujours une résistance interne r.

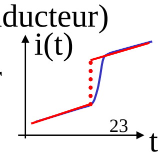
Relation intensité - tension:

$$u = r.i + L\frac{di}{dt}$$



En régime continu, i = cte donc L.di/dt = 0 (= fil conducteur)

Relations de continuité: Le courant i ne peut présenter de discontinuité, la tension ne peut être infinie.



23

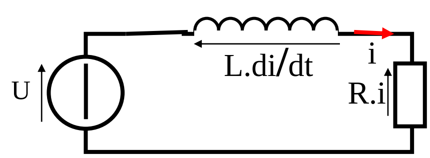
Le dipôle RL: évolution temporelle

Dipôle RL série: Alimentation par une source de tension parfaite.

évolution temporelle du courant

R est la résistance totale du circuit

$$U = R.i + L\frac{di}{dt}$$



à l'instant t=0, on ferme l'interrupteur k et le courant commence à passer. i(0)=0 .

$$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

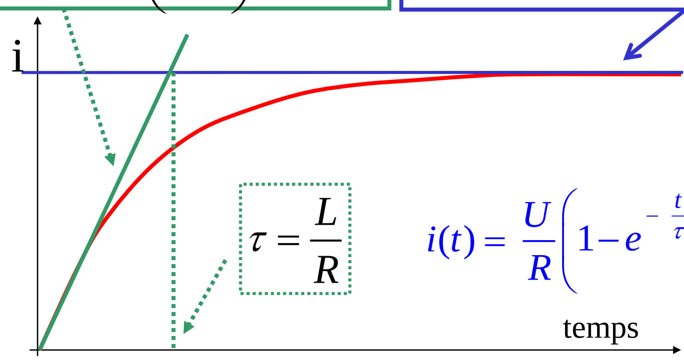
24

Le dipôle RL: évolution temporelle

$$i(t)=\frac{U}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

pente à l'origine: $\left(\frac{di}{dt}\right)_{(t=0)}=\frac{U}{L}$

Asymptote: en régime permanent i(t) $\rightarrow$ U/R



$$\boxed{\tau=\frac{L}{R}}$$

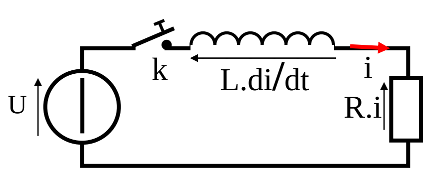
$$i(t)=\frac{U}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Unités: τ en seconde, R en ohm (Ω) et L en Henry (H)

25

Le dipôle RL: aspect énergétique

Comment évolue l'énergie au cours d'un transitoire d'établissement du courant dans une inductance?



$$U=Ri+L\frac{di}{dt}$$

$$p(t)=U.i=(Ri+L\frac{di}{dt}).i$$

$$dW=p.dt=U.idt=Ri^2dt+L.i.di$$

énergie fournie par la source

effet Joule

énergie stockée dans l'inductance

i varie de 0 à I

$$dW_L=L.i.di$$

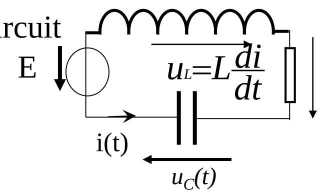
$$W_L=\int_{i=0}^{i=I}L.idi=\frac{1}{2}LI^2$$

l'énergie stockée dans l'inductance est $\frac{1}{2}LI^2$

26

3.3- Régime transitoire dans des circuits du 2^e ordre. Le dipôle RLC

Analyse du circuit



$u_L = L\dfrac{di}{dt}$ $\quad u_R = Ri \quad i(t) = C\dfrac{du_C}{dt}$

$$\boxed{E - u_c - u_R - u_L = 0}$$

mise en équation (SSM) $\quad u_C + LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + RC\dfrac{du_C}{dt} = 0$

on pose $LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\omega_0^2}\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\omega_0^2 \cdot \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

on pose $RC\omega_0^2 = 2\lambda$ $\quad \boxed{\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0 \text{ forme "canonique"}}$

27

Le dipôle RLC: Oscillations amorties

Solutions de cette équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda\frac{du}{dt} + \omega_0^2 . u(t) = 0$$

$r^2 \qquad r \qquad 1$

équation caractéristique $\quad r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \qquad \Delta = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)$

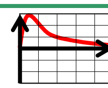
$\Delta > 0$	régime apériodique
$\Delta = 0$	régime critique
$\Delta < 0$	régime pseudo-périodique = oscillations amorties

28

Le dipôle RLC: Oscillations amorties

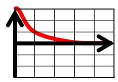
$\Delta > 0$ Régime apériodique

$$u = e^{-\lambda t}\left(Ae^{-(\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}).t} + Be^{+(\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}).t}\right)$$



$\Delta = 0$ Régime critique

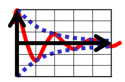
$$u = e^{-\lambda t}(At+B)$$



$\Delta < 0$ Régime pseudo-périodique = oscillations amorties

$$u = e^{-\lambda t}[A\cos(\sqrt{\omega_0{}^2-\lambda^2}\ .t)+B\sin(\sqrt{\omega_0{}^2-\lambda^2}\ .t)]$$

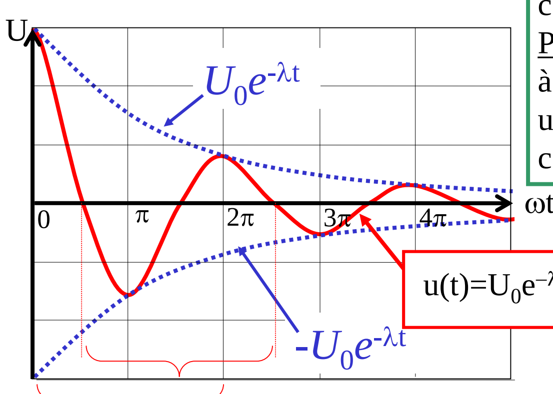
$$ou\quad u = e^{-\lambda t}.C\cos(\sqrt{\omega_0{}^2-\lambda^2}\ .t+\varphi)$$



29

Le dipôle RLC: Oscillations amorties

$$u = e^{-\lambda t}\ C\ \cos[(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2})t+\varphi\ ]$$



pseudo-période

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes C et φ.
Par exemple:
à l'instant t=0, C est chargé $u(0) = U_0$. on ferme k et le courant commence à passer.

Donc $C=U_0$ et $\varphi=0$

$$u(t)=U_0e^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\ t\right)$$

$\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ est la pseudo-pulsation.

λ est le coefficient d'amortissement.

30