Outils Mathématiques – Calcul Vectoriel

CV1

1) Les forces $\vec{F}_1$ *et* $\vec{F}_2$ ne dépendent d'aucunes variables donc elles sont constantes.

2) $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{e}_x+2\vec{e}_y+3\vec{e}_z+4\vec{e}_x-5\vec{e}_y-2\vec{e}_z$

$\vec{F}=5\vec{e}_x-3\vec{e}_y+\vec{e}_z$

$\|\vec{F}\|=\sqrt{5^2+(-3^2)+1^2}=\sqrt{35}$ donc $F=\sqrt{35}\,N$

3) $\vec{AB}=(0-20)\vec{e}_x+(0-15)\vec{e}_y+(7-0)\vec{e}_y=-20\vec{e}_x-15\vec{e}_y+7\vec{e}_z$

$W_{AB}=\vec{F}.\vec{AB}=5\times(-20)+(-3)\times(-15)+7\times1$

$W_{AB}=-48\,J$

CV3

1) $\|\vec{r}_1\|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

$\|\vec{r}_2\|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{36}=6$

$\|\vec{r}_3\|=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{49}=7$

2) $\vec{r}_1.\vec{r}_2=4\times2+(-3)\times(-4)+0\times(-4)=8+12=20$

$\vec{r}_1.\vec{r}_3=4\times2+(-3)\times(-3)=8+9=17$

$\vec{r}_2.\vec{r}_3=2\times2+(-3)\times(-4)+(-4)\times6=4+12-24=-8$

$$\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2=\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & -4\\ 0 & -4\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{matrix}=((-3)\times(-4)-(-4)\times0)\vec{e}_x+(0\times2-(-4)\times4)\vec{e}_y+(4\times(-4)-2\times(-3))\vec{e}_z$$

$\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2=12\vec{e}_x+16\vec{e}_y-10\vec{e}_z$

$$\vec{r}_1\wedge\vec{r}_3=\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{matrix}=-18\vec{e}_x-24\vec{e}_y-6\vec{e}_z$$

$$\vec{r}_2\wedge\vec{r}_3=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -4 & -3\\ -4 & 6\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{matrix}=-36\vec{e}_x-20\vec{e}_y+2\vec{e}_z$$

3) $\vec{U}=\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3$: $\vec{U}\begin{pmatrix}4+2+2\\ -3-4-3\\ 0-4+6\end{pmatrix}=\vec{U}\begin{pmatrix}8\\ -10\\ 2\end{pmatrix}$ donc $\vec{U}=8\vec{e}_x-10\vec{e}_y+2\vec{e}_z$

$\|\vec{U}\|=\sqrt{8^2+(-10)^2+2^2}=\sqrt{64+100+4}=\sqrt{168}$

$\vec{V}=\vec{r}_1+\vec{r}_2-\vec{r}_3$: $\vec{V}\begin{pmatrix}4+2-2\\ -3-4+3\\ 0-4-6\end{pmatrix}=\vec{V}\begin{pmatrix}4\\ -4\\ -10\end{pmatrix}$ donc $\vec{V}=4\vec{e}_x-4\vec{e}_y-10\vec{e}_z$

$\|\vec{V}\|=\sqrt{4^2+(-4)^2+(-10)^2}=\sqrt{16+16+100}=\sqrt{132}$

4) Méthode courte

$$\vec{U}.\vec{V}=8\times4+(-10)\times(-4)+2\times(-10)=32+40-20=52$$

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix}8 & 4\\ -10 & -4\\ 2 & -10\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{matrix}=108\,\vec{e}_x+88\,\vec{e}_y+8\,\vec{e}_z$$

En utilisant les résultats du 2)

$$\vec{U}.\vec{V}=(\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3).(\vec{r}_1+\vec{r}_2-\vec{r}_3)=\vec{r}_1{}^2+(\vec{r}_1.\vec{r}_2)+(-\vec{r}_1.\vec{r}_3)+(\vec{r}_2.\vec{r}_1)+\vec{r}_2{}^2+(-\vec{r}_2.\vec{r}_3)+(\vec{r}_3.\vec{r}_1)+(\vec{r}_3.\vec{r}_2)-\vec{r}_3{}^2$$
$$=\vec{r}_1{}^2+\vec{r}_2{}^2-\vec{r}_3{}^2+2(\vec{r}_1.\vec{r}_2)$$
$$=5^2+6^2-7^2+2\times20$$
$$\vec{U}.\vec{V}=52$$

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=(\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3)\wedge(\vec{r}_1+\vec{r}_2-\vec{r}_3)=\vec{r}_1\wedge\vec{r}_1+\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2-\vec{r}_1\wedge\vec{r}_3+\vec{r}_2\wedge\vec{r}_1+\vec{r}_2\wedge\vec{r}_2-\vec{r}_2\wedge\vec{r}_3+\vec{r}_3\wedge\vec{r}_1+\vec{r}_3\wedge\vec{r}_2-\vec{r}_3\wedge\vec{r}_3$$
$$=0+(\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2)-\vec{r}_1\wedge\vec{r}_3+(-\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2)+0-\vec{r}_2\wedge\vec{r}_3-\vec{r}_1\wedge\vec{r}_3-\vec{r}_2\wedge\vec{r}_3-0$$
$$=-2(\vec{r}_1\wedge\vec{r}_3)-2(\vec{r}_2\wedge\vec{r}_3)$$
$$=-2(-18\,\vec{e}_x-24\,\vec{e}_y-6\,\vec{e}_z)-2(-36\,\vec{e}_x-20\,\vec{e}_y+2\,\vec{e}_z)$$
$$\vec{U}\wedge\vec{V}=108\,\vec{e}_x+88\,\vec{e}_y+8\,\vec{e}_z$$

CV4

1) $\|\vec{r}_1\|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$ $\quad\|\vec{r}_2\|=\sqrt{3^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{17}$ $\quad\|\vec{r}_3\|=\sqrt{4^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{34}$

2) $\cos(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\dfrac{\vec{r}_1.\vec{r}_2}{\|\vec{r}_1\|\|\vec{r}_2\|}=\dfrac{2\times3+3\times(-2)+(-1)\times2}{\sqrt{14}\sqrt{17}}=\dfrac{-2}{\sqrt{238}}\approx-0{,}13$

$\Rightarrow(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\approx\pm97°$

3) $\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{matrix}=4\,\vec{e}_x-7\,\vec{e}_y-13\,\vec{e}_z$ $\quad$ *donc* $(\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2).\vec{r}_3=4\times4+(-7)\times(-3)+(-13)\times3=-2$

$(\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2)\wedge\vec{r}_3\neq0\Rightarrow$ les vecteurs ne sont pas coplanaires

4)

CV5

3) $\overrightarrow{CA}\,(2,-1,-1)$, $\overrightarrow{AB}\,(-2,-3,2)$

$$\overrightarrow{M_{\overrightarrow{AB}/C}}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}$$
$$=-5\,\vec{e}_x-2\,\vec{e}_y-8\,\vec{e}_z$$

CV6

1) $\overrightarrow{SA}(a\sqrt{3},-3a,-h)$ $\quad\overrightarrow{SB}(a\sqrt{3},3a,-h)$ $\quad\overrightarrow{SC}(-2a\sqrt{3},0,-h)$

$$\|\overrightarrow{SA}\|=\sqrt{(a\sqrt{3})^2+(-3a)^2+(-h)^2}=\sqrt{12a^2+h^2}$$
$$=\sqrt{400}$$
$$\|\overrightarrow{SA}\|=20\ m$$

$$\|\overrightarrow{SB}\| = \sqrt{(a\sqrt{3})^2+(3a)^2+(-h)^2} = \sqrt{12a^2+h^2}$$
$$= \|\overrightarrow{SA}\|$$
$$\|\overrightarrow{SB}\| = 20\ m$$

$$\|\overrightarrow{SC}\| = \sqrt{(-2a\sqrt{3})^2+(-h)^2} = \sqrt{12a^2+h^2}$$
$$= \|\overrightarrow{SA}\|$$
$$\|\overrightarrow{SC}\| = 20\ m$$

2) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SO} = h^2 = 100$

$$\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SO}) = \frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SO}}{\|\overrightarrow{SA}\|\|\overrightarrow{SO}\|} = \frac{100}{20\times 10} = \frac{1}{2}$$

or $\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SO}) = \cos(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SO}) = \cos(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SO}) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \varphi = \pm 60°$

3) $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$

$$= \frac{\overrightarrow{SA}}{2} + \frac{\overrightarrow{SB}}{2} + \frac{\overrightarrow{SC}}{2}$$
$$= \frac{0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + (-3h)\vec{e}_z}{2}$$
$$\vec{F} = \frac{-3h}{2}\vec{e}_z$$

4) $\overrightarrow{M_{\vec{F}_A/0}} = \overrightarrow{OS} \wedge \vec{F}_A$

$$= h\vec{e}_z \wedge \vec{F}_A$$
$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & a\sqrt{3}/2 \\ 0 & -3a/2 \\ h & -h/2 \end{vmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 3ah/2 \\ ah\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_{\vec{F}_B/0}} = \left(\begin{vmatrix} 0 & a\sqrt{3}/2 \\ 0 & 3a/2 \\ h & -h/2 \end{vmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3ah/2 \\ ah\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_{\vec{F}_C/0}} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -a\sqrt{3} \\ 0 & 0 \\ h & -h/2 \end{vmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ah\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_{\vec{F}/0}} = \sum_{i=A,B,C} \overrightarrow{M_{\vec{F}_i/0}} = \vec{0}$$

5) $A(ABC) = \frac{\|\overrightarrow{SA}\wedge\overrightarrow{SB}\|}{2}$

$$\overrightarrow{SA}\wedge\overrightarrow{SB} = \begin{vmatrix} a\sqrt{3} & a\sqrt{3} \\ -3a & 3a \\ -h & -h \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6ah \\ 0 \\ 6a^2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$$\|\overrightarrow{SA}\wedge\overrightarrow{SB}\| = \sqrt{36a^2h^2+108a^4} = a\sqrt{36h^2+108a^2}$$

$A(ABC) \approx 198{,}5\ m^2$