IF122 : Introduction à la théorie des jeux en informatique

Anca Muscholl (LaBRI)
anca@labri.fr

labri.fr/perso/anca/Games.html

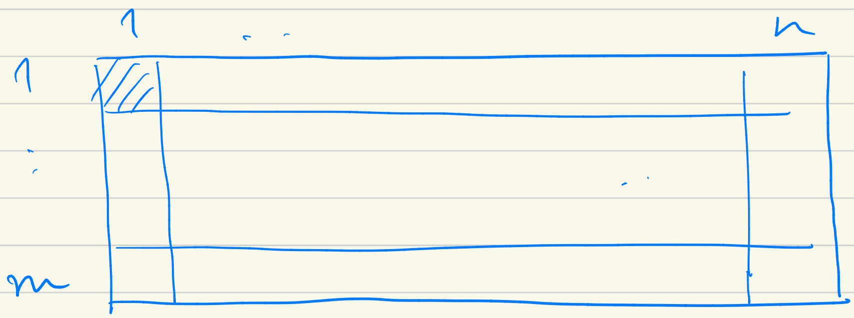
→ Enseirb

- jeux combinatoires + introduction
- jeux en vérification, jeu et automates
- jeux non-coopératifs, Nash

Jeux combinatoires

On commence par qqs exemples.

$\boxed{\text{CHOMP}}$ jeu de tablette de chocolat



(1,1) empoisonné

2 joueurs : P1, P2 ("player")
qui jouent de façon alternée.

Coup : choisir un carré (i, j) de la tablette restante, et enlever les carrés (k, l) tq $k \geq i$, $l \geq j$

Le joueur qui prend (1,1) perd.

Le joueur qui ne perd pas, gagne.

On veut savoir qui gagne.

Partie de jeu : une séquence de coups où P_1 et P_2 s'alternent, avec P_1 qui commence.

π : partie

$$\pi = \underset{P_1}{(i_1, j_1)}, \underset{P_2}{(i_2, j_2)} \dots , (i_p, j_p)$$

Stratégie de P_1 : informellement, façon de jouer quand c'est son tour

σ_1 : stratégie de P_1

σ_2 : stratégie de P_2

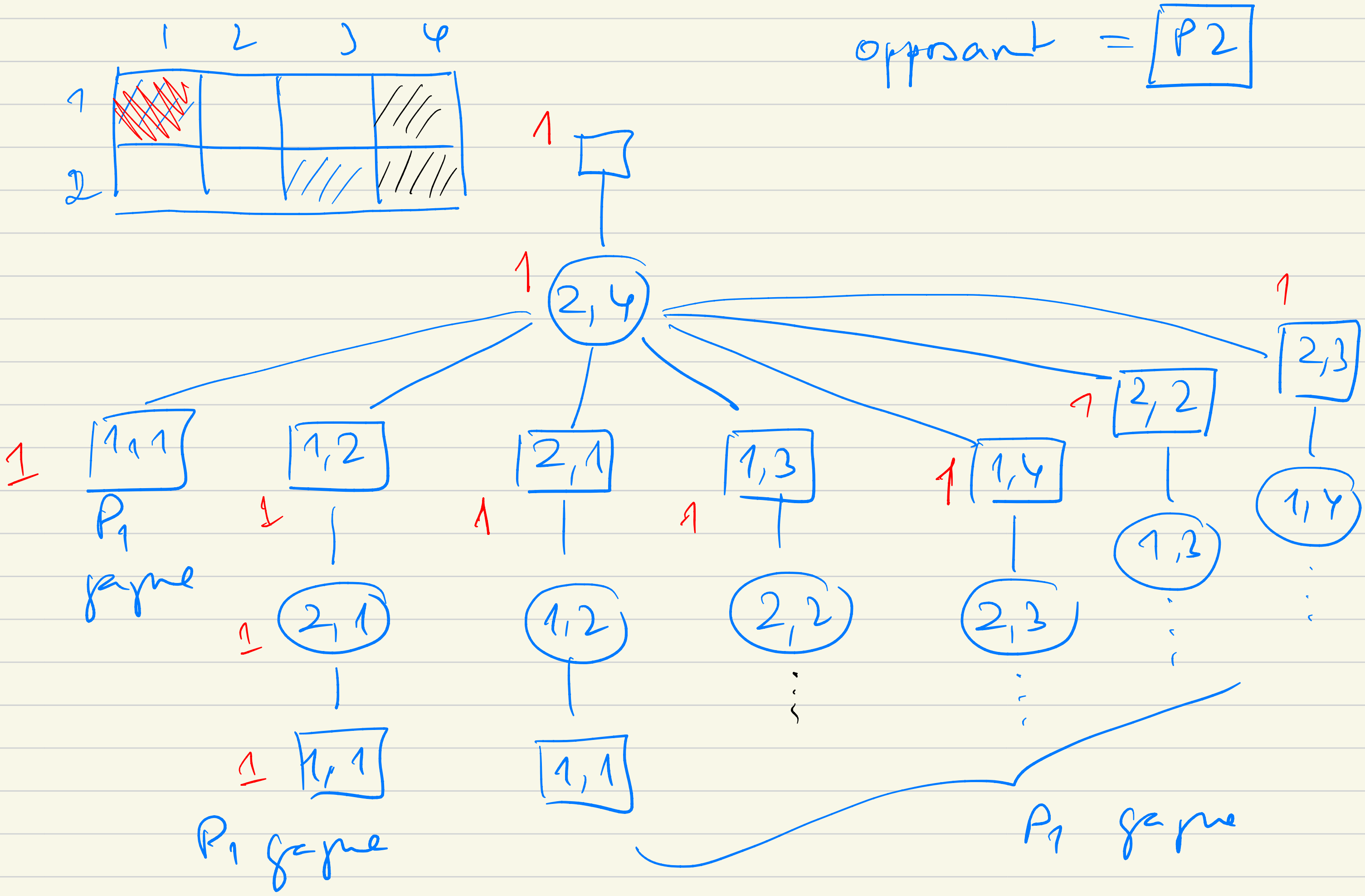
$$\sigma_1 : \left(\left([1..n] \times [1..m] \right)^2 \right)^* \longrightarrow [1...n] \times [1..m]$$

$c \in [1..n] \times [1..m]$ coups du jeu

$m = 2, \quad n = 4$

nous = P1

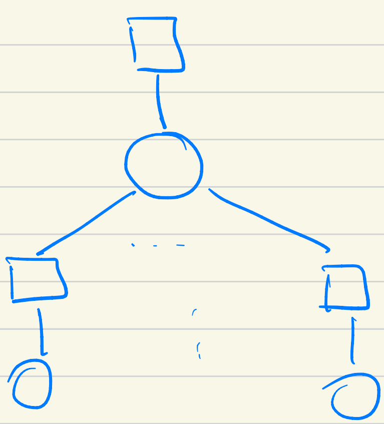
opposant = P2



Arbre de jeu (pdv. de P1)

○ : P2 joue

□ : P1 joue



CHOMP :

- jeu à 2 joueurs
- fini (toutes les parties sont finies)
- à somme nulle
  (ce n'est pas possible que P_1 et P_2 gagnent)

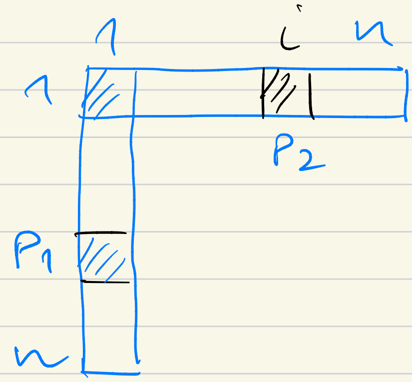
En général : il y a une valeur à gagner et ce que P_1 gagne, P_2 perd, et vice-versa.

- déterminé : toute partie est gagnée soit par P_1 ou par P_2

On va montrer que P_1 gagne le jeu de CHOMP, donc P_1 a une stratégie gagnante.

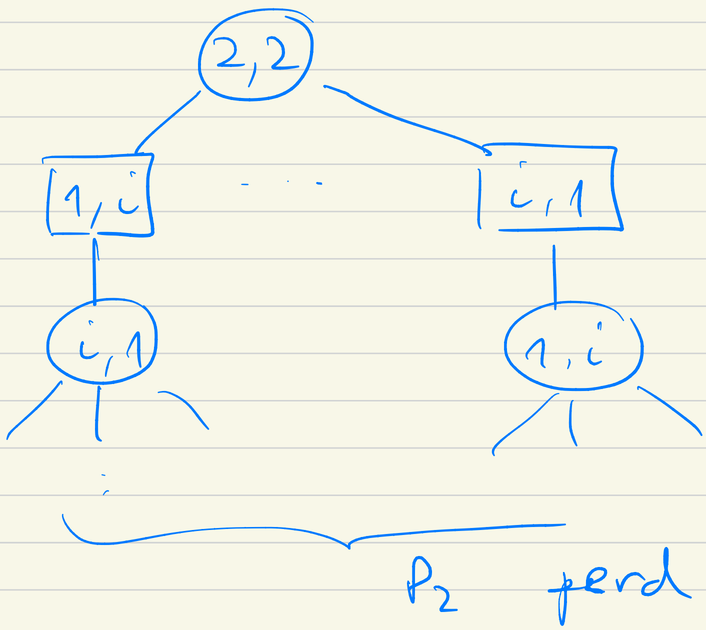
2 cas :

① $\boxed{m = n}$. On montre ici une stratégie gagnante de P_1.



P_1 commence par $(2,2)$:

Si P_2 joue $(1,i)$, alors
P_1 joue $(i,1)$,
et vice-versa.



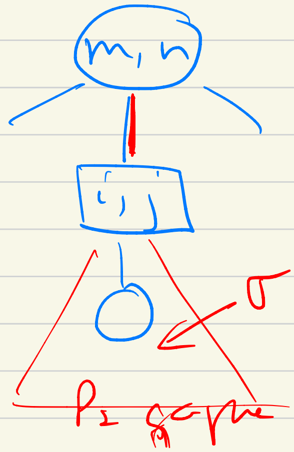
② $\boxed{m, n \text{ arbitraires}}$

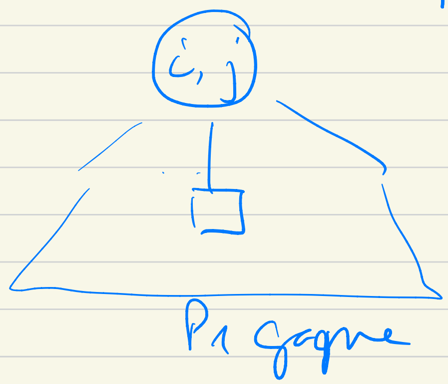
On montre l'existence d'une stratégie gagnante pour P_1, par "vol de stratégie".

Supposons par l'absurde que P_2 a une stratégie gagnante σ. (*)

Si P_1 choisit (m, n), alors P_2 applique σ et joue (i, j), et va gagner toutes les parties.

Mais : P_1 aurait pu commencer par le coup (i, j), et ensuite il applique σ.





P_1 joue avec σ

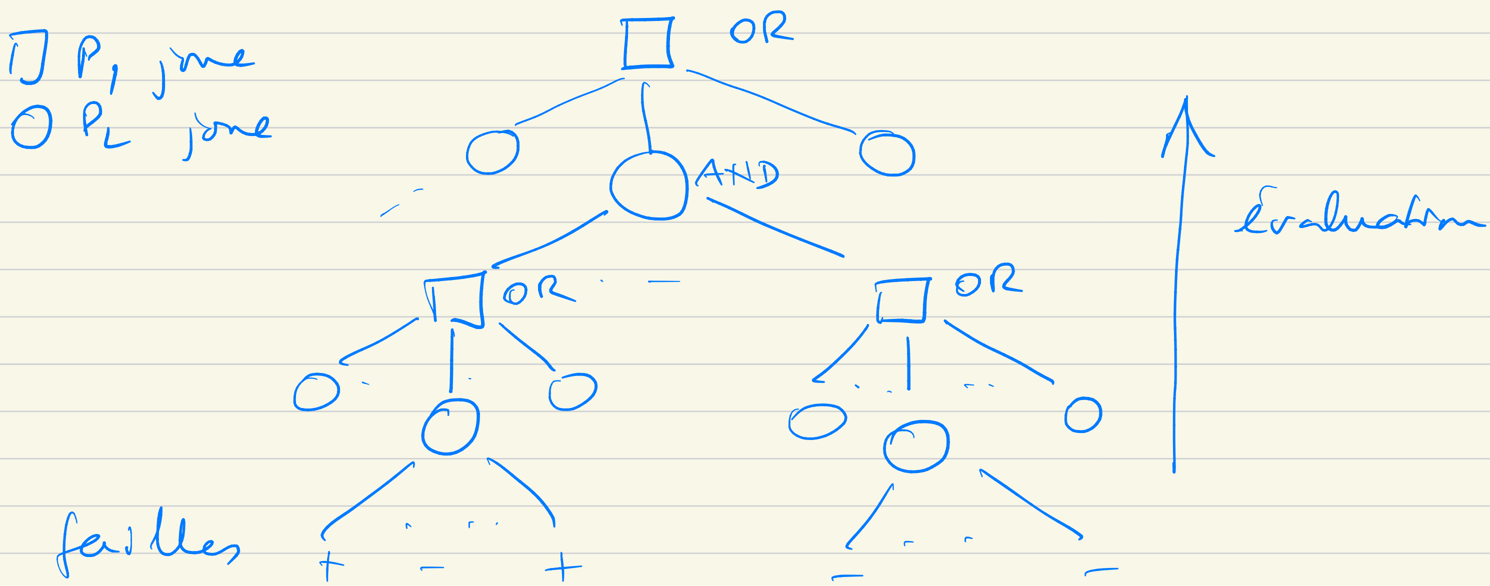
$\rightarrow$ contradiction avec (*)

On vient de montrer que P_2 n'a pas de stratégie gagnante. Mais pourquoi P_1 a une ?

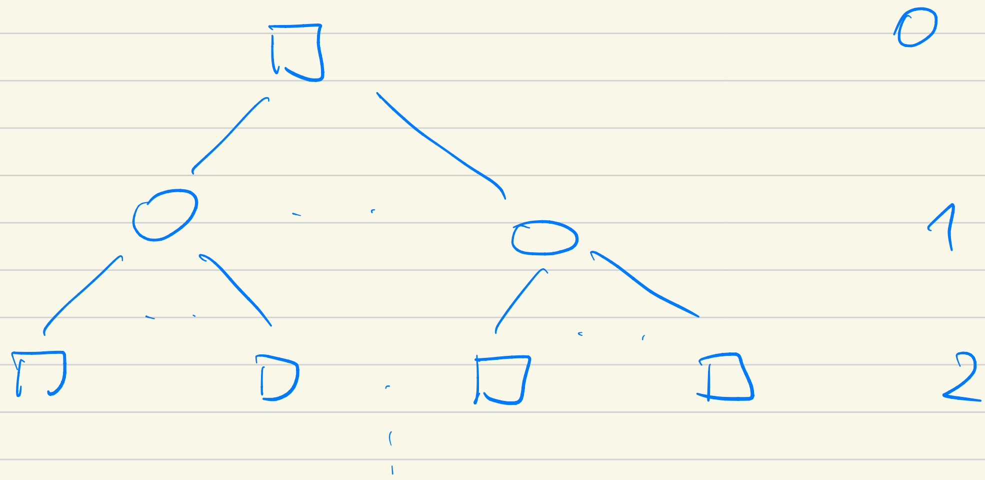
Parce que ce jeu est <u>déterminé</u>.

Parce que tout jeu fini est déterminé.

(jeu fini sans parties indécises)



feuilles — W(inning) / L(osing) } pour P_1 : W(inning) +, L(osing) −



niveaux pairs : P_1 qui joue $\longrightarrow$ OR

impairs : P_2 $\longrightarrow$ AND

- level(n) pair

$$val(n) = \bigvee_{n_i \text{ fils de } n} val(n_i)$$

- level(n) impair

$$val(n) = \bigwedge_{n_i \text{ fils de } n} val(n_i)$$

- n feuille :

$$val(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in L \\ 1 & \text{si } n \in W \end{cases}$$

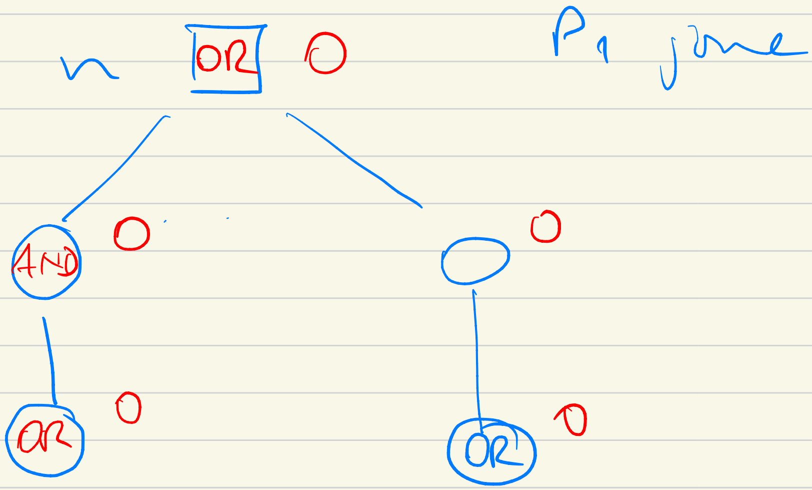
P_1 gagne le jeu $\Longleftrightarrow$ $val(root) = 1$

(*) Si n est gagnant pour P_1, c-à-d $val(n) = 1$ alors à partir de n, P_1 va jouer n_i (fils de n) tq. $val(n_i) = 1$

$$\boxed{val(n) = 1 \iff P_1 \text{ a stratégie gagnante à partir de } n}$$

$val(n) = 1 \xrightarrow{(*)}$ strat. gagn. de P_1

$val(n) = 0 \longrightarrow$ strat. gagn. de P_2



P_2 va choisir dans les noeuds n où il joue, un fils de valeur 0.
C'est gagnant pour P_2.

$\boxed{\text{NIM}}$ p tas de jetons, avec

$n_1, \dots, n_p$ jetons

Coup : choisir un tas et enlever au moins 1 jeton de ce tas

P_1 commence, P_1 et P_2 s'alternent

XOR $(1 \text{ XOR } 1 = 0)$

m, n binaire $\quad m \text{ XOR } n$

$10 \text{ XOR } 2 = 8$

$1010 \text{ XOR } 0010 = 1000$

$6 \text{ XOR } 13 = 11$

$0110 \text{ XOR } 1101 = 1011$

<u>Thm</u> (Bouton 1902)

P_1 gagne NIM $\iff$

$n_1 \text{ XOR} \dots n_p \neq 0$